用 MATLAB 设计巴特沃斯低通滤波器

1　巴特沃斯低通滤波器的特性

一个理想低通滤波器的幅频特性如图 3-80 的阴影部分所示。为了实现这个理想低通特性，需要在从 0~ω_C 的整个频带内增强增益，在$\omega>\omega_C$ 增益要降到 0。实际上，理想滤波器是不可能实现的。图 3-78 是实际滤波器的幅频特性。但是实际滤波器的特性愈接近理想特性愈好，巴特沃斯（Butterworth）滤波器就是解决这个问题的方法之一。

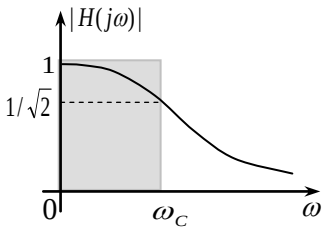
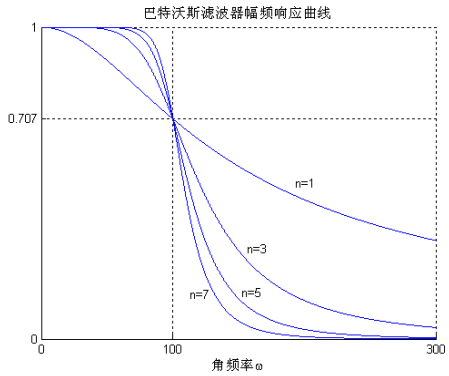


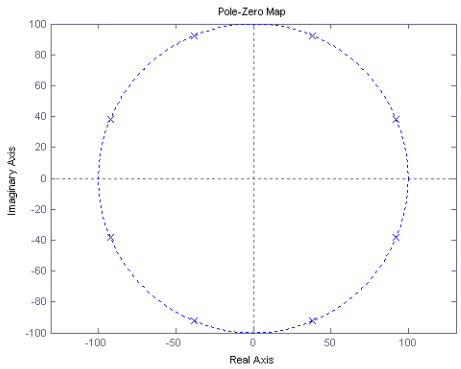
图 3-78 低通滤波器的幅频特性

巴特沃斯滤波器以巴特沃斯函数来近似滤波器的系统函数，巴特沃斯的低通模平方函数为：

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+(j\omega/j\omega_C)^{2N}} \qquad N=1,2, \qquad (3\text{-}138)$$



(a) 巴特沃斯滤波器幅频响应



(b) 4 阶巴特沃斯滤波器极点图

图 3-79 巴特沃斯滤波器幅频响应和零极点图

式中 N 是滤波器的阶数；ω_C 是滤波器的截止频率，当 $\omega=\omega_C$ 时，$|H(j\omega)|^2=1/2$ 所以 ω_C 是滤波器的电压-3dB 点或半功率点。

不同阶次的巴特沃斯滤波器特性如图 3-79(a)所示。4 阶巴特沃斯滤波器的极点分布如图 3-79(b)所示。

巴特沃斯滤波器幅频响应有以下特点：

- 最大平坦性：在 $\omega=0$ 附近一段范围内是非常平直的，它以原点的最大平坦性来逼近理想低通滤波器。
- 通带、阻带下降的单调性。这种滤波器具有良好的相频特性。
- 3dB 的不变性：随着 N 的增加，频带边缘下降越陡峭，越接近理想特性。但不管 N 是多少，幅频特性都通过-3dB 点。
- 极点配置在半径为ω_C 的圆上，并且均匀分布。左半平面上的 N 个极点是 $H(s)$ 的极点，右半平面上的 N 个极点是 $H(-s)$ 的极点。

2　巴特沃斯低通滤波器的实现

为使巴特沃斯滤波器实用，我们必须能够实现它。一个较好的方法是将巴特沃斯滤波器函数化成若干二阶节级联，其中每一节实现一对共轭复极点。通过将极点以共轭复数的形式配对，对所有的每一个二阶节都具有实系数。

图 3-80 所示运算放大器电路为实现一对共轭极点提供了很好的方法。电路的系统函数为

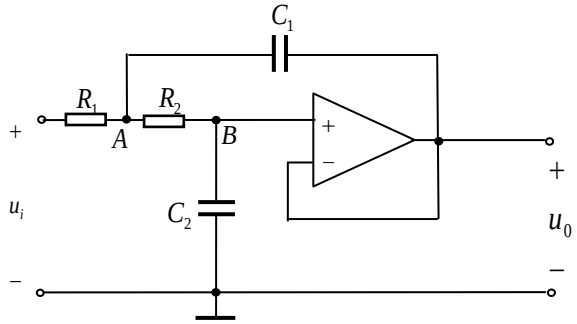


图 3-80 二阶节的电路

$$H(s)=\frac{\dfrac{1}{R_1R_2C_1C_2}}{s^2+(\dfrac{1}{R_1C_1}+\dfrac{1}{R_2C_1})s+\dfrac{1}{R_1R_2C_1C_2}}=\frac{\omega_0^2}{s^2+(\dfrac{\omega_0}{Q})s+\omega_0^2} \qquad (3\text{-}139)$$

式中，ω_0 是 S 平面原点与极点之间的距离，Q 被称为电路的“品质因数”，它提供了对响应峰值尖锐程度的一种度量。高 Q 值滤波器的极点距离ω轴较近，它抬高了所在频率处的幅度响应值。

电路中元件值的确定，一种较简单的方法是令 $R_1=R_2=R$，则有

$$\frac{2}{RC_1}=\frac{\omega_0}{Q}，\quad \frac{1}{R^2C_1C_2}=\omega_0^2 \qquad (3\text{-}140)$$

可得

$$C_1=\frac{2Q}{R\omega_0}，\quad C_2=\frac{1}{2QR\omega_0} \qquad (3\text{-}141)$$

巴特沃斯滤波器的极点与原点距离为 ω_C，所以，$\omega_C=\omega_0$。

巴特沃斯滤波器设计步骤为

1．根据需要确定截止频率 f_C 或 ω_C，巴特沃斯滤波器的阶数。
2．求出巴特沃斯滤波器的系统函数。
3．求出极点，将极点以共轭复数的形式配对。
4．求出二阶的系统函数的各分子分母系数。并计算 Q 值。
5．给 $R_1=R_2=R$ 分配一个实际电阻值。
6．按（3-141）式计算 C_1、C_2 的值。

3 设计举例

例 设计 4 阶巴特沃斯滤波器。截止频率 $f_C=3000$Hz，用图 3-80 的运算放大器电路实现。设 $R_1=R_2=R=56000\Omega$。

解 MATLAB 可以自动完成这个设计计算。程序如下

```
% 设计 4 阶巴特沃斯滤波器
wc=3000*2*pi;R=56000;
[b,a]=butter(4,wc,'s');                    % 求系统函数的系数
```

```
sys=tf(b,a)                                % 系统函数的多项式形式
figure(1)
pzmap(sys),                                % 画零极点图
hold on;u=0:pi/200:2*pi;
r=wc*exp(i*u);                             % 画半径为 wc 的圆
plot(r,':'),axis('equal')                  % 使 x,y 轴的刻度相等
title('4 阶巴特沃斯滤波器极点分布图')
disp('零点和极点模型')
[z p k]=tf2zp(b,a),format short g          % 多项式模型转换成零点和极点模型
disp('第 1 个二阶节参数')
a1=poly([p(1),p(2)]),Q1=wc/a1(2),C1=2*Q1/R/wc,C2=1/(2*Q1*R*wc)
disp('第 2 个二阶节参数')
a2=poly([p(3),p(4)]),Q2=wc/a2(2),C1=2*Q2/R/wc,C2=1/(2*Q2*R*wc)
figure(2)
f=linspace(0,6000,300);
H1=freqs(a1(3),a1,2*pi*f);                 % 求第 1 个二阶节频率响应值
H2=freqs(a2(3),a2,2*pi*f);                 % 求第 2 个二阶节频率响应值
plot(f,abs(H1),'r:',f,abs(H2),'r:',f,abs(H1).*abs(H2))
set(gca,'xtick',[0 3000 6000]);
set(gca,'ytick',[0 0.707 1 1.5]);grid
xlabel('频率 f(Hz)');
ylabel('幅度');
title('幅频响应曲线')
```

运行程序可得到如下输出

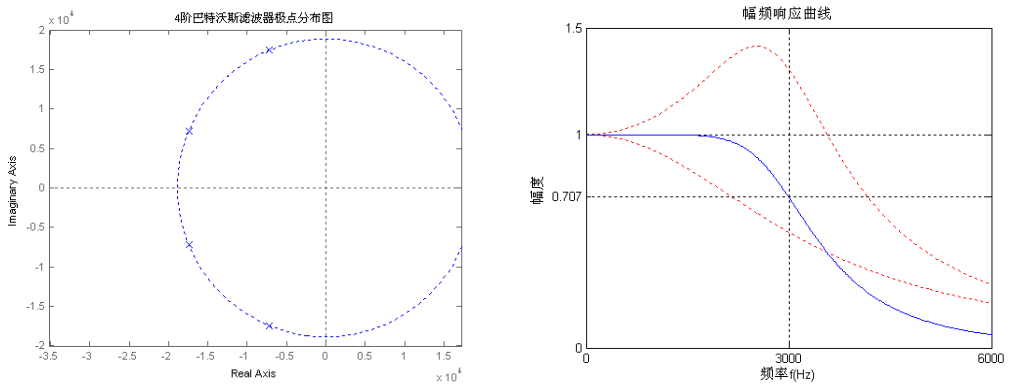
```
Transfer function:
                          1.262e017
-------------------------------------------------------------
s^4 + 4.926e004 s^3 + 1.213e009 s^2 + 1.75e013 s + 1.262e017

零点和极点模型
z =
   Empty matrix: 0-by-1
p =
     -7213.4 +     17415i
     -7213.4 -     17415i
      -17415 +    7213.4i
      -17415 -    7213.4i
k =
      1.2624e+017
第 1 个二阶节参数
a1 =   1       14427  3.5531e+008
```

```
Q1 =  1.3066
C1 =  2.4755e-009
C2 =  3.6254e-010
```

第 2 个二阶节参数

```
a2 =   1        34829  3.5531e+008
Q2 =  0.5412
C1 =  1.0254e-009
C2 =  8.7524e-010
```

运行程序可得到如下输出图形如图 3-81 所示。



(a) 4 阶巴特沃斯滤波器极点图　　(b) 两个 2 阶节及乘积的幅频响应

图 3-81　4 阶巴特沃斯滤波器零极点图和幅频响应

以上计算的元件值都是实际的，所以这个滤波器是能够实现的。图 3-83 给出了两级幅度响应曲线（虚线），而总的响应曲线（实线）证实了 4 阶巴特沃斯滤波器响应。第 1 级的 Q 值为 1.31 较高，极点距离ω轴较近，它的幅度响应尖锐。而第 2 级的 Q 值为 0.54 较小，极点距离ω轴较远，其幅度响应平缓。在实际中，最好将高 Q 值一级排在后，这样可以降低高增益导致滤波器硬件饱和的危险。

除了巴特沃斯滤波器来逼迫理想滤波器之外，常用的滤波器还有切比雪夫、贝塞尔以及椭圆滤波器。它们的设计方法与巴特沃斯滤波器的设计方法类似，更详细的介绍请参考有关模拟滤波器设计的资料。