# 第8章　系统的状态空间分析

# 第8章 系统的状态空间分析

## 8.0 引 言

## 一、系统的状态变量分析法简介

### 1、系统的状态空间描述：

用系统的状态方程和输出方程描述系统输入、状态变量、输出之间的关系。

状态方程：表示系统状态变量与输入之间的关系/方程。对n阶系统，状态方程是由n个一阶微分方程（差分方程）组成的方程组。

输出方程：表示系统输出与输入和状态之间的关系/方程。对n阶系统，若有q个输出，输出方程是由q个代数方程组成的方程组。

## 2、系统状态方程的解

A.连续系统状态方程、输出方程的解：

(1) 时域解

(2) s域解

B.离散系统状态方程、输出方程的解：

(1) 时域解

(2) z域解

# 二、状态空间分析法的应用及优点：

1.状态方程和输出方程不仅描述了系统的输入和输出关系，而且描述了系统输入、输出和系统内部状态的关系，便于分析设计与系统内部状态有关的问题。例如：系统的稳定性分析；最优控制；最优化设计等。因此，状态空间分析法也称为内部分析法。

2、不仅适用于线性、时不变、单输入单输出系统分析，也适用于非线性、时变、多输入多输出系统分析；

3、描述方法规律性强，便于用计算机解决复杂系统的分析设计问题。

# 8.1 系统的状态空间描述

## 一、连续系统的状态变量、状态方程、输出方程：

### 1、状态变量：

（1）初始状态：设初始时刻为 $t_0$ .

$t_0$ 时刻的状态通常指电容元件上电压 $u_c(t_0)$ 和电感元件上电流 $i_L(t_0)$ 。n阶系统有n个初始状态。

初始状态的一般定义：

系统在 $t_0$ 时刻的状态是最少数目的一组数，知道了这组数和区间[ $t_0$ ，t]上的输入，就可以完全确定系统在t时刻的输出。

表示：n阶系统的初始状态表示为： $x_1(t_0), x_2(t_0), \cdots, x_n(t_0)$

说明：系统状态的数目是一定的,但状态的选择不唯一。

例. 设二阶系统的初始状态为 $x_1(t_0), x_2(t_0)$ 并且：

$$\begin{cases} g_1(t_0) = a_1 x_1(t_0) + a_2 x_2(t_0) \\ g_2(t_0) = b_1 x_1(t_0) + b_2 x_2(t_0) \end{cases}$$

则 $g_1(t_0), g_2(t_0)$ 也可作为系统在 $t_0$ 时刻的状态。

(2) 状态变量：

表示状态随时间变化的一组变量称状态变量。

设 $t_0$ 时刻的状态为：$x_1(t_0), x_2(t_0)\ldots\ldots, x_n(t_0).$

则系统的状态变量 ——— 任一时刻t的状态为：

$$x_1(t), x_2(t)\ldots\ldots, x_n(t).$$

（3）状态矢量、状态空间：

状态矢量：由状态变量构成的列矢量 $X(t)$ 称状态矢量。

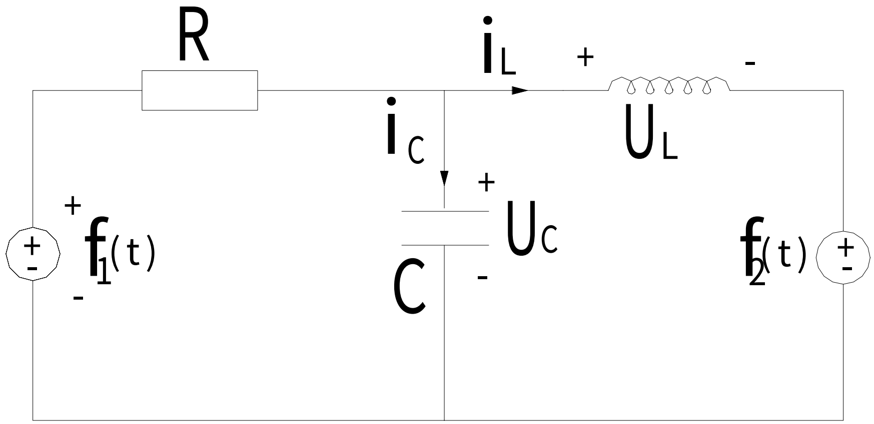
$$X(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

状态空间：状态矢量 $X(t)$ 所在的空间称状态空间。

## 2、 状态方程和输出方程：

### （1）状态方程：

例：



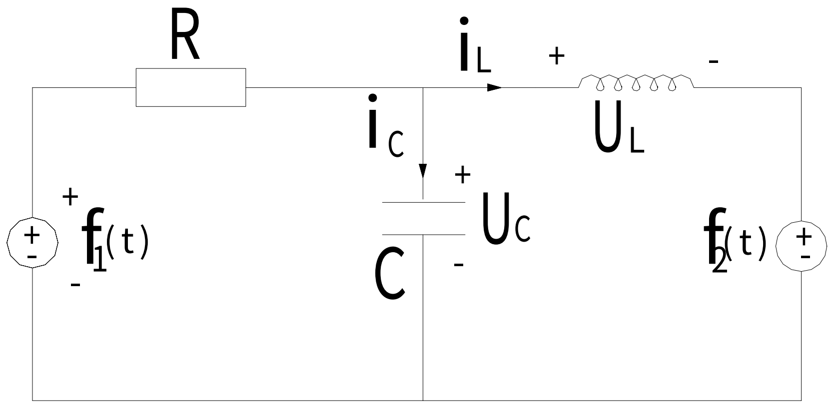

系统输入：$f_1(t), f_2(t)$ 系统输出：$y_1(t) = i_c(t)$

$y_2(t) = u_c(t)$

系统的状态：$u_c(t), i_L(t)$

由KCL和KVL得：

$$\begin{cases} c\dfrac{du_c}{dt} = \dfrac{1}{R_1}(f_1 - u_c) - i_L \\ L\dfrac{di_L}{dt} = u_c - f_2 \end{cases}$$




令：

$$u_c = x_1, i_L = x_2$$

$$u_c \quad = \dot{x}_1, i_L = \dot{x}_2$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{1}{RC}x_1 - \dfrac{1}{C}x_2 + \dfrac{1}{RC}f_1 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{L}x_1 - \dfrac{1}{L}f_2 \end{cases}$$

上面的方程组称图示RLC系统的状态方程，其矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{RC} & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{RC} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

**状态方程**：描述系统状态与输入之间的关系的一阶微分方程组。

**状态方程的一般形式**：

设n阶系统的状态变量为：$x_1, x_2 \cdots, x_n$.

系统有p个输入：$f_1, f_2 \cdots, f_p$.

则系统的状态方程为：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}f_1 + b_{12}f_2 + \cdots + b_{1p}f_p \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}f_1 + b_{22}f_2 + \cdots + b_{2p}f_p \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}f_1 + b_{n2}f_2 + \cdots + b_{np}f_p \end{cases}$$

矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

令

$$\dot{X} = [\dot{x}_1 \quad \dot{x}_2 \quad \cdots \quad \dot{x}_n]^T \quad , X = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T$$

$$f = [f_1 \ f_2 \cdots f_n]^T$$

$$A = [a_{ij}]_{n\times n} \quad , \quad B = [b_{ij}]_{n\times p}$$

则

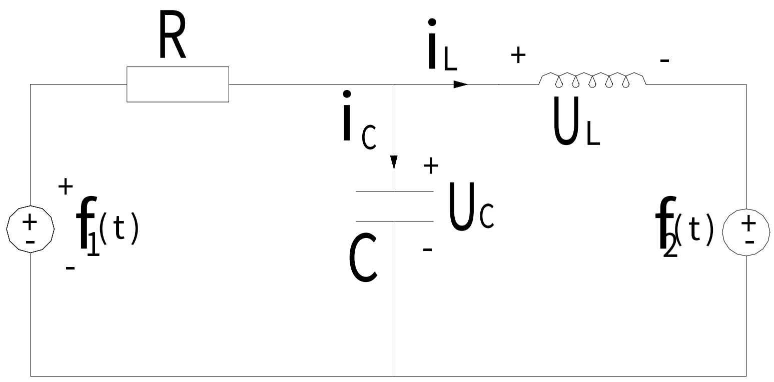
$$\dot{X} = AX + Bf$$

## （2）输出方程：

例：以图8.1RLC系统为例,系统输出 $y_1 = i_c$ ， $y_2 = u_L$ .

由KCL、KVL得：

$$\begin{cases} i_c = c\dfrac{du_c}{dt} = \dfrac{1}{R}(f_1 - u_c) - i_L \\ u_L = u_c - f_2 \end{cases}$$




$$\begin{cases} y_1 = -\dfrac{1}{R}x_1 - x_2 + \dfrac{1}{R}f_1 \\ y_2 = x_1 - f_2 \end{cases}$$

上式称图示RLC系统的输出方程，其矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R} & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

输出方程：描述系统输出、输入、状态之间关系的代数方程组。

输出方程一般形式：设n阶系统有n个状态、p个输入、q个输出，则输出方程为：

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n + d_{11}f_1 + d_{12}f_2 + \cdots + d_{1p}f_p \\ y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n + d_{21}f_1 + d_{22}f_2 + \cdots + d_{2p}f_p \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ y_q = c_{q1}x_1 + c_{q2}x_2 + \cdots + c_{qn}x_n + d_{q1}f_1 + d_{q2}f_2 + \cdots + d_{qp}f_p \end{cases}$$

矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots & c_{qn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1p} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2p} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ d_{q1} & d_{q2} & \cdots & d_{qp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_p \end{bmatrix}$$

令

$$Y = [y_1 \quad y_2 \cdots y_q]^T \quad , \quad C = [c_{ij}]_{q\times n} \quad , \quad D = [d_{ij}]_{q\times p}$$

则 $Y = CX + Df$

## 二、离散系统状态变量、状态方程、输出方程：

### 1、状态变量：

（1）初始状态：设初始时刻 $K_0 = 0$，对n阶系统，

初始状态通常指：$y(-1)$ ，$y(-2)$ ，$\cdots$ ，$y(-n)$ .

$K_0$时刻状态的一般定义：

$K_0$时刻的状态是数目最少的一组数，知道了这组数和$[K_0, K]$区间上的输入，就可完全确定系统在K时刻的输出。

（2）状态变量、状态矢量：

状态变量：表示状态随时间变化的一组变量。

表示：对n阶系统，状态变量表示为：

$$x_1(k)\ ,\ x_2(k)\ ,\ \cdots\ ,\ x_n(k)\ .$$

状态矢量：

$$X(k)=\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

## 2、状态方程和输出方程：

例1. 设系统的方程为

$$y(k)-a_1 y(k-1)-a_0 y(k-2)=b_0 f(k)$$

设 $x_1(k)=y(k-2)$ ， $x_2(k)=y(k-1)$

得：

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = a_0 x_1(k) + a_1 x_2(k) + b_0 f(k) \end{cases} \quad \text{①}$$

$$y(k) = a_0 x_1(k) + a_1 x_2(k) + b_0 f(k) \quad \text{②}$$

①式称系统的状态方程，②式称系统的输出方程。

矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_0 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} f(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + b_0 f(k)$$

离散系统状态方程、输出方程的一般形式：

状态方程：描述系统状态与输入关系的一阶前向差分方程组。

一般形式：n阶系统，p个输入。

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_p \end{bmatrix}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$X(k+1) \qquad A \qquad X(k) \qquad B \qquad f(k)$$

$$X(k+1) = AX(k) + Bf(k)$$

**输出方程**：描述系统输出、输入、状态之间关系的代数方程组。

**一般形式**： n阶系统，p个输入，q个输出。

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_n(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots & c_{qn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1p} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2p} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ d_{q1} & d_{q2} & \cdots & d_{qp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_p \end{bmatrix}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$Y(k) \qquad\qquad C \qquad\qquad X(k) \qquad\qquad D \qquad\qquad f(k)$$

$$Y(k) = CX(k) + Df(k)$$

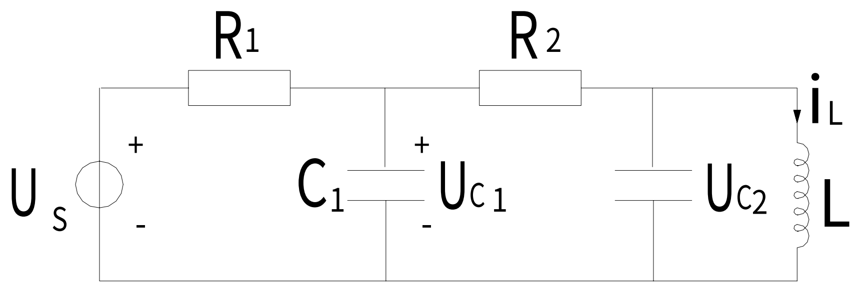
# 8.2 状态方程的建立

## 一、连续系统状态方程的建立：

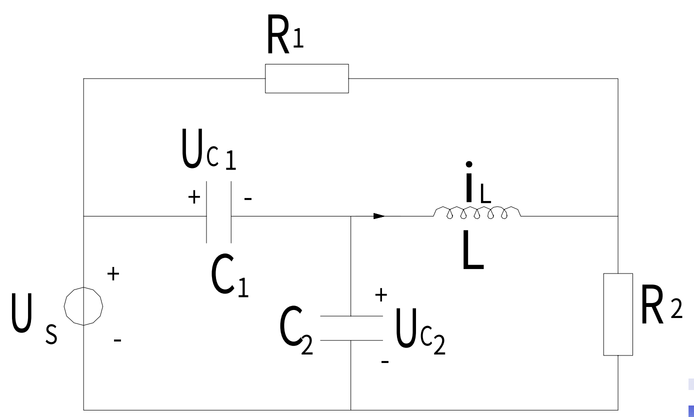
### 1. RLC系统状态方程的建立－直观编写法：

#### （1）状态变量的选择：

例：

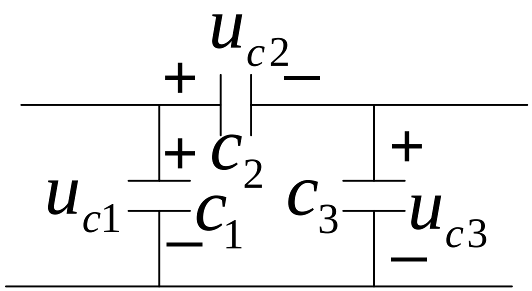



选择 $u_{c1}$、$u_{c2}$、$i_L$ 为状态变量.




选（1）$u_{c1}$ ,$i_L$ .

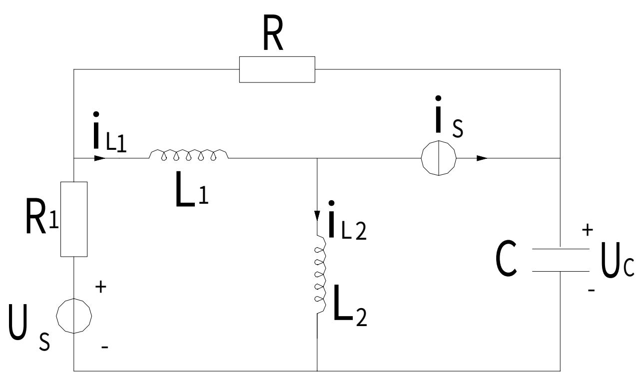
（2）$u_{c2}$ ,$i_L$ .




选：（1）$u_{c1}$、$u_{c2}$

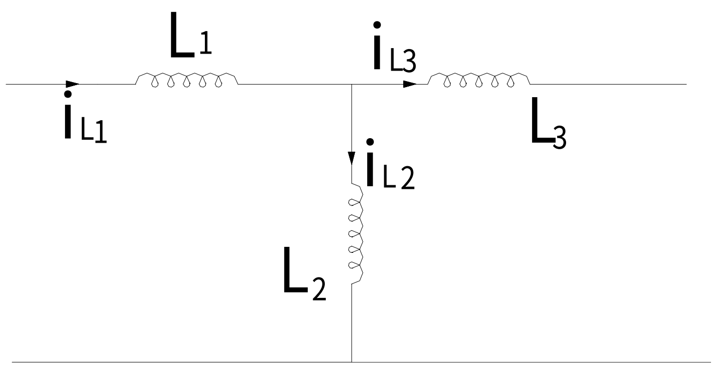
或：（2）$u_{c1}$、$u_{c3}$

或：（3）$u_{c2}$、$u_{c3}$




选：（1）$i_{L1}$，$u_c$

（2）$i_{L2}$，$u_c$



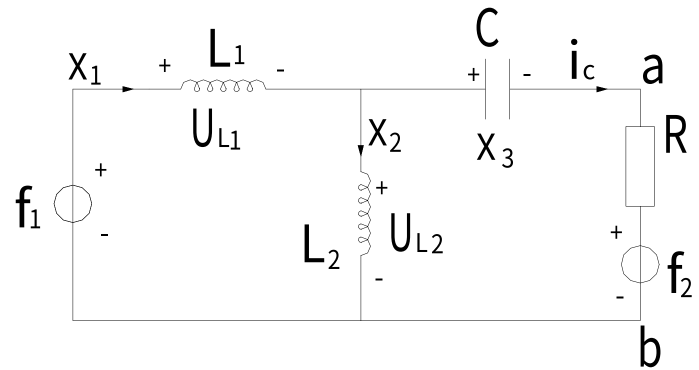

选：（1）$i_{L1}$、$i_{L2}$

或：（2）$i_{L1}$、$i_{L3}$

或：（3）$i_{L2}$、$i_{L3}$

(2).直观编写法步骤：

例：




选状态变量：$x_1 = i_L$ ， $x_2 = i_{L2}$ ， $x_3 = u_c$

设输出为：$y_1 = u_{L2}$ ， $y_2 = u_{ab}$

列状态方程：

第一步：关于 $L_1\dot{x}_1$ ， $L_2\dot{x}_2$ （电感电压）列KVL方程；

$$L_1\dot{x}_1 = u_{L1} = f_1 - x_3 - R(x_1 - x_2) - f_2$$

$$= -Rx_1 + Rx_2 - x_3 + f_1 - f_2$$

$$L_2\dot{x}_2 = u_{L2} = x_3 + R(x_1 - x_2) + f_2$$
$$= -Rx_1 - Rx_2 + x_3 + f_2$$

第二步：关于 $C\dot{x}_3$（电容电流）列KCL方程；

$$C\dot{x}_3 = i_c = x_1 - x_2$$

第三步：消去除状态变量和输入以外的其它变量，把状态方程整理成标准形式；

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{R}{L_1}x_1 + \dfrac{R}{L_1}x_2 - \dfrac{1}{L_1}x_3 + \dfrac{1}{L_1}f_1 - \dfrac{1}{L_1}f_2 \\[2ex] \dot{x}_2 = -\dfrac{R}{L_2}x_1 - \dfrac{R}{L_2}x_2 + \dfrac{1}{L_2}x_3 + \dfrac{1}{L_2}f_2 \\[2ex] \dot{x}_3 = \dfrac{1}{C}x_1 - \dfrac{1}{C}x_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{R}{L_1} & \frac{R}{L_1} & -\frac{1}{L_1}\\ \frac{R}{L_2} & -\frac{R}{L_2} & \frac{1}{L_2}\\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{L_1} & -\frac{1}{L_1}\\ 0 & \frac{1}{L_2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1\\ f_2\end{bmatrix}$$

列输出方程：

$$\begin{cases} y_1=u_{L2}=L_2\dot{x}_2\\ \quad =Rx_1-Rx_2+x_3+f_2\\ y_2=u_{ab}=i_cR+f_2=c\dot{x}_3R+f_2\\ \quad =Rx_1-Rx_2+f_2\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & -R & 1 \\ R & -R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

## 2.由系统微分方程编写状态方程：

例：已知系统方程为

$$y'''(t) + a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_0 f(t)$$

列出系统的状态方程和输出方程。

（1） 选择状态变量：令 $x_1 = y$ ， $x_2 = y$ ， $x_3 = y$

（2） 状态方程：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 + b_0 f \end{cases}$$

（3） 输出方程： $y = x_1$

矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} f$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

例2. 已知系统方程为

$$y'''(t)+a_2y''(t)+a_1y'(t)+a_0y(t)=b_1f'(t)+b_0f(t)$$

列出系统状态方程和输出方程。

(1) 选择状态变量：

引入 $q(t)$：$y(t)+a_2y(t)+a_1y(t)+a_0y(t)=f(t)$ ——— ①

① 式代入原方程得：$y(t)=b_1q(t)+b_0q(t)$ ——— ②

令 $x_1=q$, $x_2=q$ , $x_3=q$

（2） 列状态方程：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 + f \end{cases}$$

（3） 列输出方程：$y = b_1 x_2 + b_0 x_3$

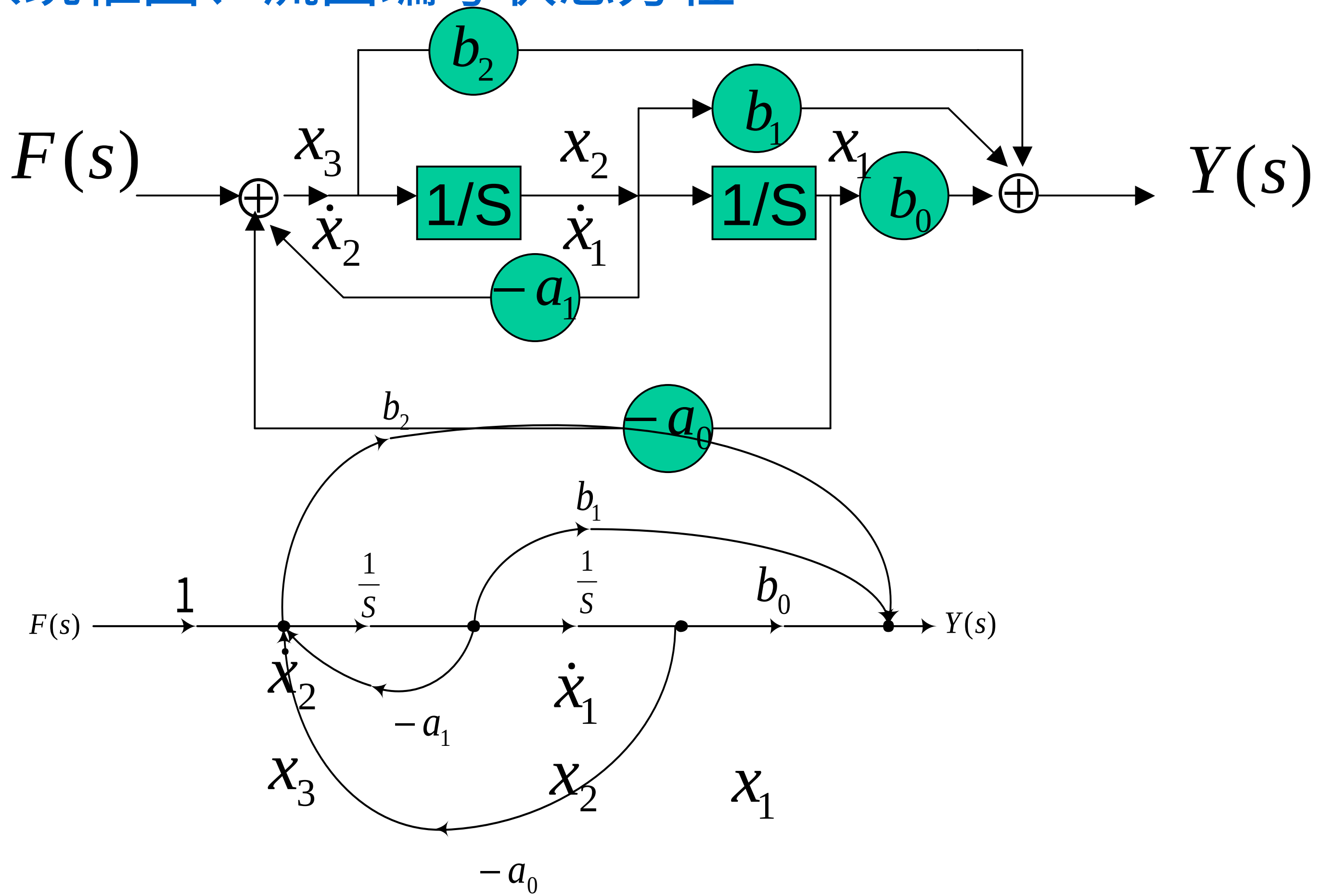
矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} f$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

## 3.由系统框图、流图编写状态方程：

例：




某LTI二阶系统框图及流图如图所示，列写状态方程和输出方程。

(1)选状态变量：选积分器输出为状态变量，如图所示；

(2) 状态方程：
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a_0 x_1 - a_1 x_2 + f \end{cases}$$

(3) 输出方程：
$$y = b_0 x_1 + b_1 x_2 + b_2(-a_0 x_1 - a_1 x_2 + f)$$
$$= (b_0 - a_0 b_2) x_1 + (b_1 - a_1 b_2) x_2 + f$$

## 二、离散系统状态方程、输出方程的编写：

### 1．由差分方程编写：

例1：已知系统方程为

$$y(k)+a_1y(k-1)+a_0y(k-2)=bf(k)$$

列状态方程和输出方程。

(1) 状态变量选择：

令 $x_1(k)=y(k-2)$ ， $x_2(k)=y(k-1)$

(2) 状态方程：

$$\begin{cases} x_1(k+1)=x_2(k) \\ x_2(k+1)=-a_0x_1(k)-a_1x_2(k)+bf(k) \end{cases}$$

(3) 输出方程：

$$y(k) = -a_0 x_1(k) - a_1 x_2(k) + bf(k)$$

矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} f(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + b\, f(k)$$

例2：已知系统方程为

$$y(k+2)+a_1 y(k+1)+a_0 y(k)=bf(k)$$

列写系统状态方程和输出方程。

(1) 状态变量选择：

令 $x_1(k)=y(k)$ ， $x_2(k)=y(k+1)$

(2) 状态方程：

$$\begin{cases} x_1(k+1)=x_2(k) \\ x_2(k+1)=-a_0 x_1(k)-a_1 x_2(k)+bf(k) \end{cases}$$

(3) 输出方程： $y(k)=x_1(k)$

例3：已知系统方程为

$$y(k+2)+a_1 y(k+1)+a_0 y(k)=b_2 f(k+2)+b_1 f(k+1)+b_0 f(k)$$

列状态方程、输出方程。 —— 1

(1) 状态变量的选择：

引入 $q(k)$ : $q(k+2)+a_1 q(k+1)+a_0 q(k)=f(k)$ —— 2

2 式代入 1 式得：

$$y(k)=b_2 q(k+2)+b_1 q(k+1)+b_0 q(k)$$

令 $x_1(k)=q(k)$ ， $x_2(k)=q(k+1)$

(2) 状态方程：

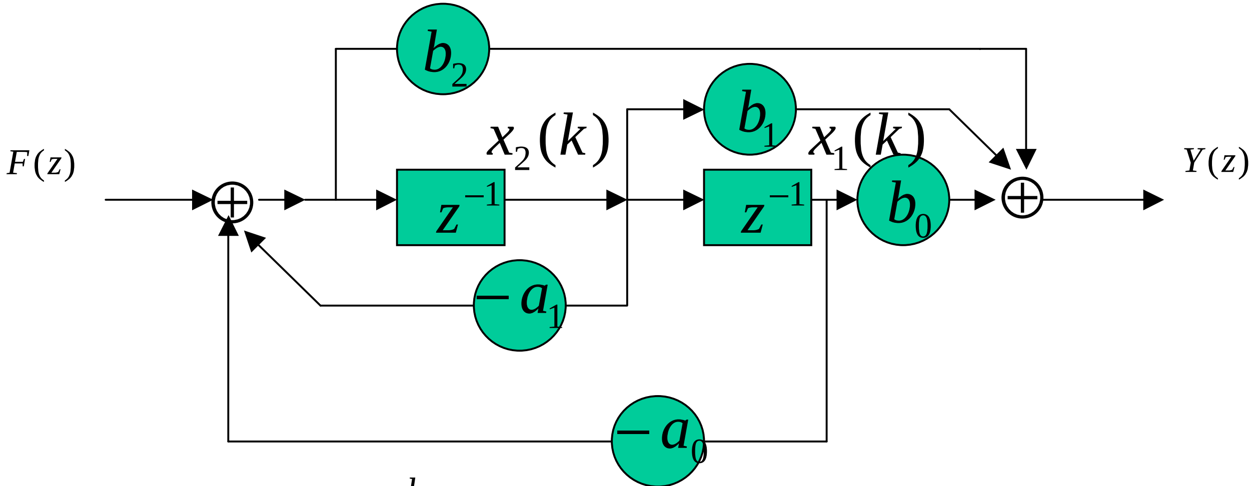
$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = -a_0 x_1(k) - a_1 x_2(k) + f(k) \end{cases}$$

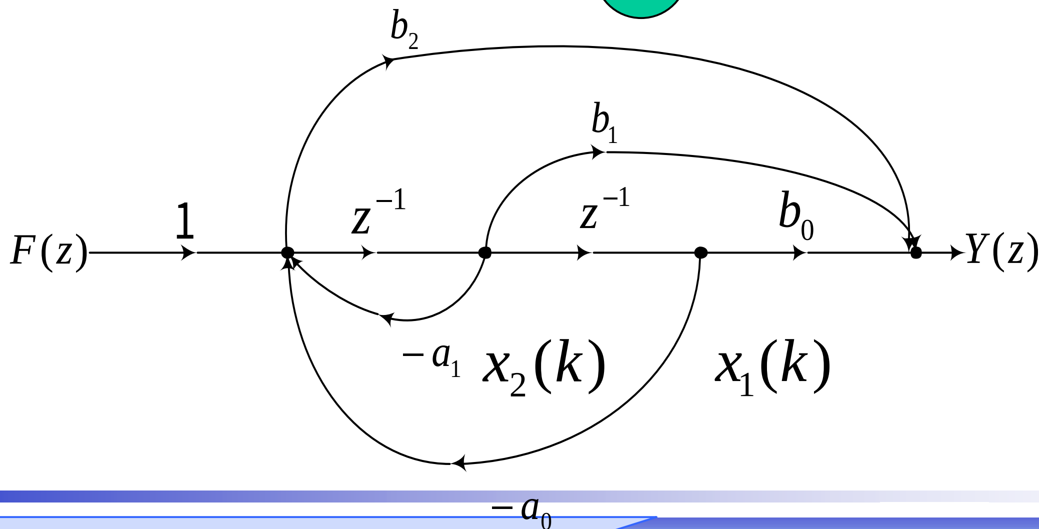
(3) 输出方程：

$$\begin{aligned} y(k) &= b_0 x_1(k) + b_1 x_2(k) + b_2[-a_0 x_1(k) - a_1 x_2(k) + f(k)] \\ &= (b_0 - a_0 b_2) x_1(k) + (b_1 - a_1 b_2) x_2(k) + b_2 f(k) \end{aligned}$$

## 2.由矩阵框图、信号流图编写状态方程

例:已知系统框图、流图如图所示,列写状态方程和输出方程.



(1) 选择状态变量:选单位延迟器的输出为状态变量,
如图所示.

(2) 根据框图、流图的信号传输关系建立状态方程和输出关系.

# 8.3 连续系统状态方程的解

## 一、矩阵函数:

### 1.矩阵函数的定义:

设A为n阶方阵，对于收敛的幂级数 $f(x)=\sum_{i=0}\alpha_i x^i$ ，

定义矩阵函数 $f(A)$ ， $f(A)=\sum_{i=0}^{00}\alpha_i A^i$ ， **(A类比x)**

## 2.矩阵指数函数的定义：

设A为n阶方阵，对于指数函数 $f(x)=e^x$,

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}x^i$$

定义矩阵指数函数 $e^A$ 和 $e^{At}$分别为

$$e^A=I+A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}A^i$$

$$e^{At}=I+At+\frac{t^2}{2!}A^2+\cdots$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^i}{i!}A^i$$

## 3.矩阵的导数、积分和卷积：

(1) 导数、积分: 设矩阵 $A(t)=[a_{ij}(t)]_{n\times m}$

则 $$\int_{-\infty}^{t} A(t)dt=[\int_{-\infty}^{t} a_{ij}(t)dt]_{n\times m}$$

$$\frac{d}{dt}A(t)=[\frac{d}{dt}a_{ij}(t)]_{n\times m}$$

(2) 卷积: 设 $A(t)=[a_{ij}(t)]_{m\times n}$ ， $B(t)=[b_{ij}(t)]_{n\times m}$

$A(t)*B(t)$ 等于$A(t)\bullet B(t)$ 运算中元素的相乘变成卷积运算.

例.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} * b_{11} + a_{12} * b_{21} & \cdots \\ a_{21} * b_{11} + a_{22} * b_{21} & \cdots \end{bmatrix}$$

4.矩阵运算的几个定理：设A、B为n阶方阵。

（1） $\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At} = e^{At}A$

（2） $e^{At_1} \cdot e^{At_2} = e^{A(t_1+t_2)}$

（3）设 $AB = BA$，则 $e^{At} \cdot e^{At} = e^{A(t+t)}$

（4）设X为n维列向量，A为n阶方阵，则

$$\frac{d}{dt}(e^{-At} \cdot X) = e^{-At} \cdot \dot{X} - Ae^{-At} \cdot X$$

（5）设A为方阵，则 $e^{At}$恒有逆，且 $(e^{At})^{-1}=e^{-At}$。

（6） 设A、P为n阶方阵，P为非奇异阵（det（P）＝0），则

$$e^{PAP^{-1}t}=Pe^{At}P^{-1}$$

## 二、状态方程的时域解：

1.状态方程的时域解：对n阶系统。

状态方程：$\dot{X}(t)=AX(t)+Bf$

$$\dot{X}(t)-AX(t)=Bf \qquad ①$$

①式两边乘以 $e^{-At}$，得

$$e^{-At}\dot{X}(t)-e^{-At}AX(t)=e^{-At}Bf(t)$$

根据矩阵函数运算的定理（4），上式可写成：

$$\frac{d}{dt}[e^{-At}X(t)] = e^{-At}Bf(t) \qquad \text{——} \quad 2$$

对 2式两边积分，得：

$$\int_{t_0}^{t}[\frac{d}{dt}(e^{-A\tau}X(\tau)]d\tau = \int_{t_0}^{t}e^{-A\tau}Bf(\tau)d\tau$$

$$e^{-At}X(t) - e^{-At_0}X(t_0) = \int_{t_0}^{t}e^{-A\tau}Bf(\tau)d\tau$$

$$\therefore \quad X(t) = e^{A(t-t_0)}X(t_0) + \int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}Bf(\tau)d\tau$$

设 $t_0 = 0\_$，得：

$$X(t) = e^{At}X(0\_) + \int_{0\_}^{t} e^{A(t-\tau)}Bf(\tau)d\tau$$

设 $\Phi(t) = e^{At}$ ———— 称状态转移矩阵.

则 $$X(t) = \Phi(t)X(0\_) + \int_{0\_}^{t} \Phi(t-\tau)Bf(\tau)d\tau$$

$$= \underbrace{\Phi(t)X(0\_)}_{X_x(t)} + \underbrace{\Phi(t)B * f(t)}_{X_f(t)}$$

$X_x(t) \downarrow$ 零输入分量　　$X_f(t) \downarrow$ 零状态分量

## 2.输出方程的解：

输出方程为：$y(t)=CX(t)+Df(t)$

把状态方程的解代入输出方程，得：

$$y(t)=C[\Phi(t)X(0\_)+\Phi(t)B*f(t)]+Df(t)$$
$$=C\Phi(t)X(0\_)+C\Phi(t)B*f(t)+Df(t)$$

引入p阶对角阵 $\delta(t)$ ：

$$\delta(t)=\begin{bmatrix}\delta(t) & & & 0\\ & \delta(t) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \delta(t)\end{bmatrix}_{p\times p}$$

则

$$\delta(t) * f(t) = f(t).$$

$$Y(t) = C\Phi(t)X(0\_) + C\Phi(T)B * f(t) + D\delta(t) * f(t)$$

$$= \underbrace{C\Phi(t)X(0\_)}_{Y_x(t)} + \underbrace{[C\Phi(t)B + D\delta(t)] * f(t)}_{Y_f(t)}$$

$Y_x(t) = C\Phi(t)X(0\_)$ —— 零输入响应

$Y_f(t) = h(t) * f(t)$ —— 零状态响应

$h(t) = C\Phi(t)B + D\delta(t)$ —— 冲激响应，$(q\times p)$.

$$h(t) = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1p} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2p} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ h_{q1} & h_{q2} & \cdots & h_{qp} \end{bmatrix}$$

$h_{ij}(t)$ —— $f_j(t) \neq 0$，其余输入为零时，$y_{f_i}(t)$对应的冲激响应。

3. $\Phi(t)=e^{At}$的计算：

（1）n阶方阵A的特征方程、特征根：

特征多项式： $\det(A-\lambda I)=|A-\lambda I|$

特征方程： $|A-\lambda I|=0$

特征根：特征方程的根$\lambda_i$ $,i=1\ ,\ 2\ ,\ \cdots\ ,n.$

(2) 凯莱 —— 哈密顿定理：

任何方阵A，恒满足它的特征方程。

设 $q(\lambda)=|A-\lambda I|=0$

则 $q(A)=0$

(3) $\Phi(t)=e^{At}$ 的计算：

设n阶方阵A的特征根为 $\lambda_j$，j=1，2，…，n .

$$e^{\lambda_j t}=1+t\lambda_j+\frac{t^2}{2!}\lambda_j^2+\cdots$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\beta_i\lambda_j^i$$

$$e^{At}=I+tA+\frac{t^2}{2!}A^2+\cdots$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\beta_i A^i$$

根据A的特征方程和凯莱——哈密顿定理可以

证明：

$$e^{\lambda_j t}=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i\lambda_j^{\,i}=1+\alpha_1\lambda_j+\alpha_2\lambda_j^{\,2}+\cdots+\alpha_{n-1}\lambda_j^{\,n-1}$$

$$e^{At}=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i A^i=I+\alpha_1 A+\alpha_2 A^2+\cdots+\alpha_{n-1}A^{n-1}$$

由A的n个特征根和 $e^{\lambda_j t}$ 的展开式确定系数 $\alpha_i$ ，代入 $e^{At}$ 的展开式，就可求得 $e^{At}$。

$e^{At}$ 的计算步骤：

（1） A的特征根为单根：

第一步：求n阶方阵A的特征根 $\lambda_i$ ，i=1 ,2 , … ,n .

第二步：由n个特征根建立以下n个方程：

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_1^{\ 2} + \cdots + \alpha_{n-1} \lambda_1^{\ n-1} \\ e^{\lambda_2 t} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2 \lambda_2^{\ 2} + \cdots + \alpha_{n-1} \lambda_2^{\ n-1} \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ e^{\lambda_n t} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_n + \alpha_2 \lambda_n^{\ 2} + \cdots + \alpha_{n-1} \lambda_n^{\ n-1} \end{cases}$$

第三步：解上面方程组，求 $\alpha_i$, i=1 ,2 , … ,n .

第四步：把$\alpha_i$代入下式，求$e^{At}$：

$$e^{At}=\alpha_0 I+\alpha_1 A+\alpha_2 A^2+\cdots+\alpha_{n-1}A^{n-1}$$

（2）A的特征根有重根：设$\lambda_1$为m重根，另有n-m个单根。

第一步：求n阶方阵A的特征根 $\lambda_1$，$\lambda_2$，…，$\lambda_q$. q=n-m+1.

第二步：由特征根$\lambda_i$建立以下n个方程：

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t}=\alpha_0+\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_1^2+\cdots+\alpha_{n-1}\lambda_1^{n-1} \\ \dfrac{d}{d\lambda_1}(e^{\lambda_1 t})=\dfrac{d}{d\lambda_1}(\alpha_0+\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_1^2+\cdots+\alpha_{n-1}\lambda_1^{n-1}) \\ \dfrac{d^2}{d\lambda_1^2}(e^{\lambda_1 t})=\dfrac{d^2}{d\lambda_1^2}(\alpha_0+\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_1^2+\cdots+\alpha_{n-1}\lambda_1^{n-1}) \\ \cdots \qquad \cdots \\ \dfrac{d^{m-1}}{d\lambda_1^{m-1}}(e^{\lambda_1 t})=\dfrac{d^{m-1}}{d\lambda_1^{m-1}}(\alpha_0+\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_1^2+\cdots+\alpha_{n-1}\lambda_1^{n-1}) \end{cases}$$

$$e^{\lambda_2 t}=\alpha_0+\alpha_1\lambda_2+\alpha_2\lambda_2^{\ 2}+\cdots+\alpha_{n-1}\lambda_2^{\ n-1}$$

$$e^{\lambda_3 t}=\alpha_0+\alpha_1\lambda_3+\alpha_2\lambda_3^{\ 2}+\cdots+\alpha_{n-1}\lambda_3^{\ n-1}$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$e^{\lambda_q t}=\alpha_0+\alpha_1\lambda_q+\alpha_2\lambda_q^{\ 2}+\cdots+\alpha_{n-1}\lambda_q^{\ n-1}$$

第三步：解上面方程组,求$\alpha_i$, i=0 , 1 ,2 ,…, $\alpha_{n-1}$.

第四步: 把$\alpha_i$ 代入下式求 $e^{At}$：

$$e^{At}=\alpha_0 I+\alpha_1 A+\alpha_2 A^2+\cdots+\alpha_{n-1}A^{n-1}$$

例1. $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix}$，求$e^{At}$.

解: (1) 求 $A-\lambda I$：

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1-\lambda & 0\\ 1 & -2-\lambda\end{bmatrix}$$

(2) 求A的特征根:

$$|A-\lambda I| = (\lambda+1)(\lambda+2) = 0,\quad \lambda_1 = -1,\quad \lambda_2 = -2.$$

(3)建立求 $\alpha_i$的方程,求$\alpha_i$ :

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_1 \\ e^{\lambda_2 t} = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_2 \end{cases},\qquad \begin{cases} e^{-t} = \alpha_0 - \alpha_1 \\ e^{-2t} = \alpha_0 - 2\alpha_1 \end{cases}$$

解方程组,得: $\alpha_0 = 2e^{-t} - e^{-2t},\quad \alpha_1 = e^{-t} - e^{-2t}.$

(4) 求 $e^{At}$ :

$$e^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 A = (2e^{-t} - e^{-2t})\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (e^{-t} - e^{-2t})\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ (e^{-t} - e^{-2t}) & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

例2: $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -2 & -1\end{bmatrix}$ 求 $e^{At}$ .

解: (1) 求 $A-\lambda I$ :

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}-1-\lambda & 0\\ -2 & -1-\lambda\end{bmatrix}$$

(2) 求A的特征根:

$$|A-\lambda I|=(\lambda+1)^2=0,\quad \lambda_1=\lambda_2=-1.$$

(3)建立求 $\alpha_i$的方程,求$\alpha_i$ :

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t}=\alpha_0+\alpha_1\lambda_1 \\ \dfrac{d}{dt}(e^{\lambda_2 t})=\dfrac{d}{dt}(\alpha_0+\alpha_1\lambda_2) \end{cases}\quad ,\quad \begin{cases} e^{-t}=\alpha_0-\alpha_1 \\ te^{-t}=\alpha_1 \end{cases}$$

解方程组,得: $\alpha_0 = e^{-t} + te^{-t}$, $\alpha_1 = te^{-t}$.

(4) 求 $e^{At}$ :

$$e^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 A = \begin{bmatrix} -(e^{-t} + 2te^{-t}) & 0 \\ -2te^{-t} & -(e^{-t} + 2te^{-t}) \end{bmatrix}$$

4. 由 $e^{At}$ 求A:

$$A = \frac{d}{dt}(e^{At})\big|_{t=0}$$

$$e^0 = e^{At}\big|_{t=0} = I$$

状态方程的解:

Step1: 求 $\Phi(t) = e^{At}$;

Step2: 求 $X_x(t) = \Phi(t)X(0\_)$;

Step3: 求 $X_f(t) = \Phi(t)B * f(t)$;

Step4: 求 $X(t) = X_x(t) + X_f(t)$;

输出方程的解:

Step1: 求 $\Phi(t)=e^{At};$

Step2: 求 $Y_x(t)=C\Phi(t)X(0_-);$

Step3: 求 $h(t)=C\Phi(t)B+D\delta(t);$

Step4: 求 $Y_f(t)=h(t)*f(t);$

Step5: 求 $Y(t)=Y_x(t)+Y_f(t);$

# 三、状态方程、输出方程的S域解:

## 1. 状态方程的S域解:

状态方程: $\dot{X}(t)=AX(t)+Bf(t)$

S域解:根据单边拉氏变换的时域微分性质,对状态方程两边取拉氏变换,得:

$$SX(s)-X(0_-)=AX(s)+BF(s)$$

$$SX(s)-AX(s)=X(0_-)+BF(s)$$

$$(sI-A)X(s)=X(0_-)+BF(s)$$

$$X(s)=(sI-A)^{-1}X(0_-)+(sI-A)^{-1}BF(s)$$

$$=\underbrace{\Phi(s)X(0_-)}_{X_x(s)}+\underbrace{\Phi(s)BF(s)}_{X_f(s)}$$

$$\Phi(s)=(sI-A)^{-1}=L[\Phi(t)]$$

$$X_x(s)=L[X_x(t)]$$

$$X_f(s)=L[X_f(t)]$$

$$X(t)=L^{-1}[X(s)]=L^{-1}[X_x(s)]+L^{-1}[X_f(s)]$$

## 2.输出方程的S域解:

输出方程: $Y(t) = CX(t) + Df(t)$

S域解: $Y(s) = CX(s) + Df(s)$

把$X(s)$代入上式,得:

$$Y(s) = C\Phi(s)X(0_-) + [C\Phi(s)B + D]F(s)$$

$$= \underbrace{C\Phi(s)X(0_-)}_{Y_x(s)} + \underbrace{H(s)F(s)}_{Y_f(s)}$$

$$H(s) = C\Phi(s)B + D = L[h(t)]$$

$$Y_x(s) = L[Y_x(t)]$$

$$Y_f(s) = L[Y_f(t)]$$

$$Y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}[Y_x(s)] + L^{-1}[Y_f(s)]$$

## 状态方程、输出方程的S域解步骤:

状态方程S域解:

Step1: 求 $\Phi(s)=(sI-A)^{-1};$

Step2: 求 $X_x(s)=\Phi(s)X(0_-);$

Step3: 求 $X_f(s)=\Phi(s)BF(s);$

Step4: 求 $X(s)=X_x(s)+X_f(s);$

Step5: 求 $X(t)=L^{-1}[X(s)].$

输出方程S 域解:

Step1: 求 $\Phi(s)=(sI-A)^{-1};$

Step2: 求 $Y_x(s)=C\Phi(s)X(0_-);$

Step3: 求 $H(s)=C\Phi(s)B+D;$

Step4: 求 $Y_f(s) = H(s)F(s)$

Step5: 求 $Y_x(t) = L^{-1}[Y_x(s)]$

$Y_f(t) = L^{-1}[Y_f(s)];$

Step6: 求 $Y(t) = Y_x(t) + Y_f(t).$

# 8.4 离散系统状态方程的解

## 一、状态方程、输出方程的时域解:

### 1. 状态方程的解: n阶系统,P个输入.

状态方程: $X(k+1)=AX(k)+Bf(k)$

设初始时 $k_0=0$,初始状态 $X(0)=[X_1(0),X_2(0),\cdots,X_n(0)]$.

用递推法得:

$$X(1)=AX(0)+Bf(0)$$

$$X(2)=AX(1)+Bf(1)=A[x(0)+Bf(0)]+Bf(1)$$

$$=A^2X(0)+ABf(0)+Bf(1)$$

$$X(3)=AX(2)+Bf(2)$$

$$=A^3X(0)+A^2Bf(0)+ABf(1)+Bf(2)$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$X(k)=A^kX(0)+A^{k-1}Bf(0)+A^{k-2}Bf(1)$$

$$+\cdots+ABf(k-2)+Bf(k-1).$$

$$=A^kX(0)+\sum_{i=0}^{k-1}A^{k-1-i}Bf(i)$$

$$=A^kX(0)+A^{k-1}B*f(k)$$

设$A^k=\Phi(k)$,则

$$X(k)=\underbrace{\Phi(k)X(0)}_{X_x(k)}+\underbrace{\Phi(k-1)B*f(k)}_{X_f(k)}$$

(零输入分量) (零状态分量)

**2.输出方程的解：** n阶系统,P个输入， q 个输出.

输出方程: $Y(k)=CX(k)+Df(k)$

把$X(k)$代入输出方程,得:

$$Y(k)=C\Phi(t)X(0)+C\Phi(k-1)B*f(k)+Df(k)$$

引入 $\delta(k)$:

$$\delta(k)=\begin{bmatrix}\delta(t) & & & 0\\ & \delta(t) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \delta(t)\end{bmatrix}_{p\times p}$$

则 $Df(k)=D\delta(k)*f(k).$

$$Y(k)=C\Phi(k)X(0)+[C\Phi(k-1)B+D\delta(k)]*f(k)$$

$$=\underbrace{C\Phi(k)X(0)}_{Y_x(k)}+\underbrace{h(k)*f(k)}_{Y_f(k)}$$

$h(k)=C\Phi(k-1)B+D\delta(k)$ ——————冲激响应, $(q\times p)$.

$$=\begin{bmatrix}h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1p}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ h_{q1} & h_{q2} & \cdots & h_{qp}\end{bmatrix}_{q\times p}$$

$h_{ij}(k)$ —— $f_j(k)$单独作用时,输出 $y_i(k)$的单位脉冲响应.

3. $\Phi(k)=A^k$ 的计算：

（1） $A^k$ 的计算方法：

设A为n阶方阵，$\lambda_i$为A的特征根，i=1，2，…，n.

由A的特征方程和凯莱——哈密顿定理可以证明：

$$\lambda_i^{\,k}=\alpha_0+\alpha_1\lambda_i+\alpha_2\lambda_i^{\,2}+\cdots+\alpha_{n-1}\lambda_i^{\,n-1}$$

$$A^k=\alpha_0 I+\alpha_1 A+\alpha_2 A^2+\cdots+\alpha_{n-1}A^{n-1}$$

（2） $A^k$的计算步骤：

A的特征值为单根：$\lambda_i$，i=1，2，…，n.

第一步：根据A的特征根建立以下方程：

$$\begin{cases}\lambda_1^{\,k}=\alpha_0+\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_1^{\,2}+\cdots+\alpha_{n-1}\lambda_1^{\,n-1}\\ \lambda_2^{\,k}=\alpha_0+\alpha_1\lambda_2+\alpha_2\lambda_2^{\,2}+\cdots+\alpha_{n-1}\lambda_2^{\,n-1}\\ \cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\\ \lambda_n^{\,k}=\alpha_0+\alpha_1\lambda_n+\alpha_2\lambda_n^{\,2}+\cdots+\alpha_{n-1}\lambda_n^{\,n-1}\end{cases}$$

第二步：解上面方程组，求$\alpha_i$，i=0 , 1 , 2 , … , n-1.

第三步：把 $\alpha_i$代入下式，求 $A^k$：

$$A^k = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \cdots + \alpha_{n-1} A^{n-1}$$

A的特征根有重根：设$\lambda_1$为m重根，另有n-m个单根为 $\lambda_2$， $\lambda_3$ ，… ， $\lambda_q$， q=n-m+1.

第一步：根据A的特征根建立以下个方程：

$$\begin{cases} \lambda_1^k = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_1^2 + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda_1^{n-1} \\ \dfrac{d}{d\lambda_1}(\lambda_1^k) = \dfrac{d}{d\lambda_1}(\alpha_0 + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_1^2 + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda_1^{n-1}) \\ \vdots \\ \dfrac{d^{m-1}}{d\lambda_1^{m-1}}(\lambda_1^k) = \dfrac{d^{m-1}}{d\lambda_1^{m-1}}(\alpha_0 + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_1^2 + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda_1^{n-1}) \\ \lambda_2^k = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_2 + \alpha_2\lambda_2^2 + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda_2^{n-1} \\ \vdots \\ \lambda_q^k = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_q + \alpha_2\lambda_q^2 + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda_q^{n-1} \end{cases}$$

第二步：解上面方程组，求$\alpha_i$，i=0 , 1 , 2 , … , n-1.

第三步：把 $\alpha_i$ 代入下式，求 $A^k$：

$$A^k = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \cdots + \alpha_{n-1} A^{n-1}$$

（3）由 $A^k$ 求 $A$.

$$A = A^k \mid_{k=1}$$

例1：$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$，求 $\Phi(k) = A^k$。

解：（1）求$A-\lambda I$：$A-\lambda I = \begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 \\ -2 & -1-\lambda \end{bmatrix}$

（2）求 $|A-\lambda I| = 0$ 的根：

$$|A-\lambda I| = (\lambda+1)(\lambda-2) = 0, \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2.$$

(3) 建立求$\alpha_i$的方程,求$\alpha_i$：i=0，1 .

$$\begin{cases}\lambda_1^{\ k}=\alpha_0+\alpha_1\lambda_1\\ \lambda_2^{\ k}=\alpha_0+\alpha_1\lambda_2\end{cases}\quad,\quad\begin{cases}(-1)^k=\alpha_0-\alpha_1\\ 2^k=\alpha_0+2\alpha_1\end{cases}$$

解方程组,得: $\alpha_0=\dfrac{1}{3}[2^k+2(-1)^k]$ ， $\alpha_1=\dfrac{1}{3}[2^k-(-1)^k]$.

(4) 求 $A^k$ ：

$$A^k=\alpha_0 I+\alpha_1 A$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{3}[2^k+2(-1)^k] & \dfrac{1}{3}[2^k-(-1)^k]\\ \dfrac{2}{3}[2^k-(-1)^k] & \dfrac{1}{3}[2^{k+1}+(-1)^k]\end{bmatrix}$$

例2. $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$，求 $\Phi(k)=A^k$。

解：（1）求 $A-\lambda I$,　（2）求 $|A-\lambda I|=0$ 的根：$\lambda_1=\lambda_2=2.$

(3) 建立求 $\alpha_i$的方程,求$\alpha_i$：i=0，1 .

$$\begin{cases}\lambda_1^{\ k}=\alpha_0+\alpha_1\lambda_1\\ \dfrac{d}{dt}(\lambda_1^{\ k})=\dfrac{d}{dt}(\alpha_0+\alpha_1\lambda_1)\end{cases},\quad \begin{cases}2^k=\alpha_0+2\alpha_1\\ k2^k=\alpha_1\end{cases}$$

解方程组,得: $\alpha_0=2^k-k2^k$，$\alpha_1=k2^{k-1}.$

（4）求 $A^k$：

$$A^k=\alpha_0 I+\alpha_1 A=\begin{bmatrix}2^k & 0\\ 0 & 2^k\end{bmatrix}$$

状态方程、输出方程时域解步骤：

Step1: 求 $\Phi(k)=A^k;$

Step2: 求 $X_x(K)=\Phi(k)X(0);$

Step3: 求 $X_f(k)=\Phi(k-1)B*f(k);$

Step4: 求 $X(k)=X_x(k)+X_f(k);$

输出方程的解：

Step1: 求 $\Phi(k)=A^k;$

Step2: 求 $Y_x(k)=C\Phi(k)X(0);$

Step3: 求 $h(k)=C\Phi(k-1)B+D\delta(k);$

Step4: 求 $Y_f(k)=h(k)*f(k);$

Step5: 求 $Y(k)=Y_x(k)+Y_f(k);$

# 二、状态方程、输出方程的Z域解：

## 1．状态方程的Z域解： $k_0=0$

状态方程：$X(k+1)=AX(k)+Bf(k)$

单边Z变换的左移性质：

$$f(k+m)\longleftrightarrow Z^{m}F(z)-\sum_{k=0}^{m-1}f(k)Z^{m-k}.$$

由左移性质，对状态方程两边取Z变换，得：

$$ZX(z)-ZX(0)=AX(z)+BF(z)$$

$$(zI-A)X(z)=zX(0)+BF(z)$$

$$X(z)=(zI-A)^{-1}zX(0)+(zI-A)^{-1}BF(z)$$

令 $\Phi(z)=(zI-A)^{-1}z$

则 $X(z)=\underbrace{\Phi(z)X(0)}_{X_x(z)}+\underbrace{z^{-1}\Phi(z)BF(z)}_{X_f(z)}$

$$X(k)=Z^{-1}[X(z)],$$

$$\Phi(z)=Z[\Phi(k)],\qquad \Phi(k)=Z^{-1}[\Phi(z)].$$

2．输出方程的Z域解：$k_0=0$

输出方程：$Y(k)=CX(k)+Df(k).$

方程两边取单边Z变换，得：

$$Y(z)=CX(z)+DF(z).$$

把$X(z)$代入上面方程，得：

$$Y(z)=C\Phi(z)X(0)+[Cz^{-1}\Phi(z)B+D]F(z)$$

$$=\underbrace{C\Phi(z)X(0)}_{Y_x(z)}+\underbrace{H(z)F(z)}_{Y_f(z)}$$

$$H(z)=C\Phi(z)z^{-1}B+D=Z[h(k)].$$

$$Y_x(k) = Z^{-1}[Y_x(z)],$$

$$Y_f(k) = Z^{-1}[Y_f(z)],$$

$$Y(k) = Z^{-1}[Y(z)] = Y_x(k) + Y_f(k).$$

状态方程、输出方程Z域解步骤：

状态方程的Z域解：

Step1: 求 $\Phi(z) = (zI - A)^{-1} z;$

Step2: 求 $X_x(z) = \Phi(z) X(0);$

Step3: 求 $X_f(z) = z^{-1}\Phi(z) BF(z);$

Step4: 求 $X(z) = X_x(z) + X_f(z);$

Step5: 求 $X(k) = Z^{-1}[X(z)].$

输出方程Z域解：

Step1: 求 $\Phi(z)=(zI-A)^{-1}z;$

Step2: 求 $Y_x(z)=C\Phi(z)X(0);$

Step3: 求 $H(z)=C\Phi(z)z^{-1}B+D;$

Step4: 求 $Y_f(z)=H(z)F(z);$

Step5: 求 $Y_x(k)=Z^{-1}[Y_x(z)]$

$Y_f(k)=Z^{-1}[Y_f(z)];$

Step6: 求 $Y(k)=Y_x(k)+Y_f(k).$

# 8.5 系统稳定性判别

## 一、连续系统稳定性判别：

### 1. 矩阵H(s)与系统稳定性：对n阶系统

$$H(s)=C\Phi(s)B+D=C(sI-A)^{-1}B+D.$$

$H(s)$的分母为$|sI-A|$,为S的n次多项式，可表示为：

$$|sI-A|=a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0$$

用R—H 准则判断系统的稳定性：

Step1: 对$|sI-A|$,进行R —H排列；

Step2: 根据R—H排列和R—H 准则判别系统的稳定性。

### 2. 矩阵A的特征方程与系统稳定性：对n阶系统

A的特征方程为 $|\lambda I - A| = 0.$

若 $|\lambda I - A| = 0$ 的根全部在左半复平面，或者根的实部全为负值，则系统为稳定系统。

## 二、离散系统稳定性判别：

### 1．矩阵 $H(z)$ 与系统稳定性：对n阶系统。

$$H(z) = Cz^{-1}\Phi(z)B + D = C(zI - A)^{-1}B + D,$$

$H(z)$ 的分母为 $|zI - A| = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0.$

用朱里准则判断系统稳定性：

Step1: 对 $|\lambda I - A|$ 进行朱里排列；

Step2: 根据朱里准则判断系统稳定性。

## 2．矩阵A与系统稳定性：

A的特征方程：$|\lambda I - A| = 0.$

若 $|\lambda I - A| = 0$ 的根全部在Z平面上单位圆内，

则系统为稳定系统。