点击目录，进入相关章节

第七章　离散系统z域分析

在连续系统中，为了避开解微分方程的困难，可以通过拉氏变换把微分方程转换为代数方程。出于同样的动机，也可以通过一种称为z变换的数学工具，把差分方程转换为代数方程。

7.1　z变换

一、从拉氏到z变换

对连续信号进行均匀冲激取样后，就得到离散信号：

取样信号 $$f_S(t) = f(t)\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT)$$

两边取双边拉普拉斯变换，得

$$F_{Sb}(s)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\mathrm{e}^{-kTs}$$

令$\mathbf{z = e^{sT}}$，上式将成为复变量z的函数，用F(z)表示；**f(kT) →f(k)** ，得

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

称为序列f(k)的双边z变换

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

称为序列f(k)的单边z变换

若f(k)为因果序列，则单边、双边z 变换相等，否则不等。今后在不致混淆的情况下，统称它们为z变换。

F(z) = Z[f(k)] ,f(k)= Z^{-1}[F(z)] ；f(k)←→F(z)

二、收敛域

z变换定义为一无穷幂级数之和，显然只有当该幂级数收敛，即

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|f(k)z^{-k}\right|<\infty$$

时，其z变换才存在。上式称为绝对可和条件，它是序列f(k)的z变换存在的充分条件。

收敛域的定义：

对于序列f(k)，满足 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|f(k)z^{-k}\right|<\infty$

所有z值组成的集合称为z变换F(z)的收敛域。

例1求以下有限序列的z变换(1) $f_1(k)=\delta(k)$ ↓k=0

(2) $f_2(k)=\{1,2,3,2,1\}$

解

(1) $F_1(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(k)z^{-k}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(k)z^{-k}=1$

可见，其单边、双边z变换相等。与z 无关，所以其收敛域为整个z 平面。

(2) f(k)的双边z 变换为

$$F(z)=z^2+2z+3+2z^{-1}+z^{-2}$$

收敛域为$0<|z|<\infty$

f(k)的单边z 变换为

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f(k)z^{-k}=3+2z^{-1}+z^{-2}$$

收敛域为$|z|>0$

对有限序列的z变换的收敛域一般为$0<|z|<\infty$，有时它在0或/和∞也收敛。

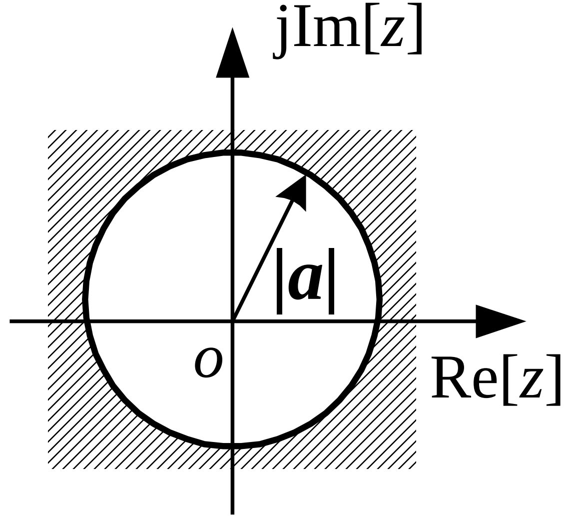
例2 求因果序列 $f_y(k) = a^k\varepsilon(k) = \begin{cases} 0, & k<0 \\ a^k, & k \ge 0 \end{cases}$ 的z变换（式中a为常数）。

解：代入定义

$$F_y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}(az^{-1})^k = \lim_{N\to\infty}\frac{1-(az^{-1})^{N+1}}{1-az^{-1}}$$

可见，仅当 $|az^{-1}|<1$，即 $|z|>|a|$ 时，其z变换存在。

$$F_y(z) = \frac{z}{z-a}$$ 收敛域为 $|z|>|a|$



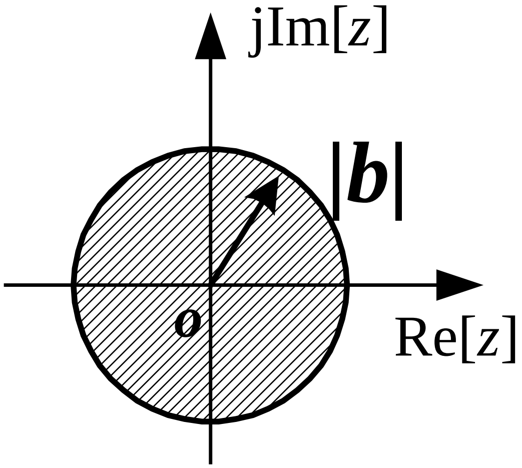
例3 求反因果序列 $f_f(k)=\begin{cases} b^k, & k<0 \\ 0, & k\ge 0 \end{cases} = b^k\varepsilon(-k-1)$ 的z变换。

解 $$F_f(z)=\sum_{k=-\infty}^{-1}(bz^{-1})^k=\sum_{m=1}^{\infty}(b^{-1}z)^m=\lim_{N\to\infty}\frac{b^{-1}z-(b^{-1}z)^{N+1}}{1-b^{-1}z}$$

可见，$|b^{-1}z|<1$,即 $|z|<|b|$ 时，其z变换存在，

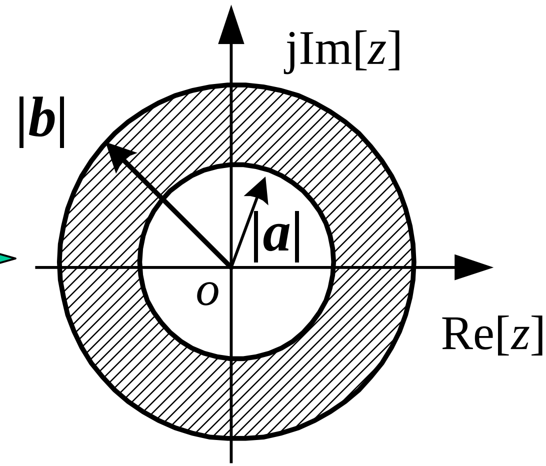
$$F_f(z)=\frac{-z}{z-b}$$

收敛域为 $|z|<|b|$



例4 双边序列 $f(k)=f_y(k)+f_f(k)=\begin{cases} b^k, & k<0 \\ a^k, & k\ge 0 \end{cases}$ 的z变换。

解 $F(z)=F_y(z)+F_f(z)=\dfrac{-z}{z-b}+\dfrac{z}{z-a}$



可见，其收敛域为 $|a|<|z|<|b|$ （显然要求 $|a|<|b|$，否则无共同收敛域）

序列的收敛域大致有一下几种情况：

（1）对于有限长的序列，其双边z变换在整个平面；

（2）对因果序列，其z变换的收敛域为某个圆外区域；

（3）对反因果序列，其z变换的收敛域为某个圆内区域；

（4）对双边序列，其z变换的收敛域为环状区域；

注意：对双边z变换必须表明收敛域，否则其对应的原序列将不唯一。

例

$$f_1(k)=2^k\varepsilon(k)\longleftrightarrow F_1(z)=\frac{z}{z-2}\ ,\quad |z|>2$$

$$f_2(k)=-2^k\varepsilon(-k-1)\longleftrightarrow F_2(z)=\frac{z}{z-2}\ ,\quad |z|<2$$

对单边z变换，其收敛域比较简单，一定是某个圆以外的区域。可以省略。

结论：

双边$F_b(Z)$ + 收敛域 $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ f(k)

单边F (Z) $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ f(k)

常用序列的z变换：

$$\delta(k) \longleftrightarrow 1\ ，\text{整个Z平面}$$

$$f_1(k)=a^k\varepsilon(k)\longleftrightarrow F_1(z)=\frac{z}{z-a}\ ,\quad |z|>a$$

$$f_2(k)=-a^k\varepsilon(-k-1)\longleftrightarrow F_2(z)=\frac{z}{z-a}\ ,\quad |z|<a$$

其中：a>0

$$\delta(k-m) \longleftrightarrow Z^{-m},\quad |z|>0$$

$$\varepsilon(k) \longleftrightarrow \frac{z}{z-1}\ ,\quad |z|>1$$

$$-\varepsilon(-k-1) \longleftrightarrow \frac{z}{z-1}\ ,\quad |z|<1$$

6.2 z变换的性质

本节讨论z变换的性质，若无特殊说明，它既适用于单边也适用于双边z变换。

一、线性

若 $f_1(k) \longleftrightarrow F_1(z) \quad \alpha_1 < |z| < \beta_1,$

$f_2(k) \longleftrightarrow F_2(k) \quad \alpha_2 < |z| < \beta_2$

对任意常数a_1、a_2，则

$$a_1 f_1(k) + a_2 f_2(k) \longleftrightarrow a_1 F_1(z) + a_2 F_2(z)$$

其收敛域至少是$F_1(z)$)与$F_2(z)$收敛域的相交部分。

例：$2\delta(k) + 3\varepsilon(k) \longleftrightarrow 2 + \dfrac{3z}{z-1}\;, \quad |z| > 1$

二、移位（移序）特性 单边、双边差别大！

双边z变换的移位：

若 $f(k) \longleftrightarrow F(z)$, $\alpha < |z| < \beta$，且对整数m>0，则

$f(k \pm m) \longleftrightarrow z^{\pm m}F(z)$, $\alpha < |z| < \beta$

证明：$Z[f(k+m)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k+m)z^{-k} \overset{n=k+m}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)z^{-n}z^{m} = z^{m}F(z)$

单边z变换的移位：

若 $f(k) \longleftrightarrow F(z)$, $|z| > \alpha$，且有整数m>0, 则

$f(k-1) \longleftrightarrow z^{-1}F(z) + f(-1)$

$f(k-2) \longleftrightarrow z^{-2}F(z) + f(-2) + f(-1)z^{-1}$

$$f(k-m) \longleftrightarrow z^{-m}F(z) + \sum_{k=0}^{m-1} f(k-m)z^{-k}$$

$$f(k+1) \longleftrightarrow zF(z) - f(0)z$$

$$f(k+2) \longleftrightarrow z^2F(z) - f(0)z^2 - f(1)z$$

$$f(k+m) \longleftrightarrow z^m F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k) z^{m-k}$$

证明：

$$Z[f(k-m)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k-m)z^{-k} = \sum_{k=0}^{m-1} f(k-m)z^{-k} + \sum_{k=m}^{\infty} f(k-m)z^{-(k-m)}z^{-m}$$

上式第二项令$k-m=n$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} f(k-m)z^{-k} + \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n}z^{-m} = \sum_{k=0}^{m-1} f(k-m)z^{-k} + z^{-m}F(z)$$

特例：若$f(k)$为因果序列，则$f(k-m) \longleftrightarrow z^{-m}F(z)$

即：$f(k-m)\,\varepsilon(k-m) \longleftrightarrow z^{-m}F(z)$

例1：求周期为N的有始周期性单位序列

$$\sum_{m=0}^{\infty}\delta(k-mN)$$

的z变换。

解 $$\sum_{m=0}^{\infty}\delta(k-mN)\longleftrightarrow\sum_{m=0}^{\infty}z^{-mN}=\frac{1}{1-z^{-N}}=\frac{z^N}{z^N-1}\qquad |z|>1$$

例2：求f(k)= k ε (k)的单边z变换F(z).

解 f(k+1)= (k+1) ε (k+1) = (k+1) ε (k) = f(k) + ε (k)

$$zF(z)-zf(0)=F(z)+\frac{z}{z-1}\qquad F(z)=\frac{z}{(z-1)^2}$$

三、序列乘a^k(z域尺度变换)

若 $f(k) \longleftrightarrow F(z)$ ，$\alpha < |z| < \beta$， 且有常数$a \neq 0$

则 $a^k f(k) \longleftrightarrow F(z/a)$, $\alpha |a| < |z| < \beta |a|$

证明：

$$Z[a^k f(k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k f(k) z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\left(\frac{z}{a}\right)^{-k} = F(\frac{z}{a})$$

例1：$a^k \varepsilon(k) \longleftrightarrow \dfrac{z}{z-a}$

例2：$\cos(\beta k)\,\varepsilon(k) \longleftrightarrow ?$

$$\cos(\beta k)\,\varepsilon(k) = 0.5(e^{j\beta k} + e^{-j\beta k})\,\varepsilon(k) \longleftrightarrow \frac{0.5z}{z-e^{j\beta}} + \frac{0.5z}{z-e^{-j\beta}}$$

四、卷积定理

若 $f_1(k) \longleftrightarrow F_1(z) \quad \alpha_1<|z|<\beta_1$,

$f_2(k) \longleftrightarrow F_2(k) \quad \alpha_2<|z|<\beta_2$

则 $f_1(k)*f_2(k) \longleftrightarrow F_1(z)F_2(z)$

对单边z变换，要求$f_1(k)$、$f_2(k)$为因果序列

其收敛域一般为$F_1(z)$与$F_2(z)$收敛域的相交部分。

例：求$f(k)= k\varepsilon(k)$的z变换F(z).

解：$f(k)= k\varepsilon(k)= \varepsilon(k)*\varepsilon(k-1)$

$$\longleftrightarrow \frac{z}{z-1}\frac{z^{-1}z}{z-1}=\frac{z}{(z-1)^2}$$

五、序列乘k（z域微分）

若 $f(k) \longleftrightarrow F(z)$ ，$\alpha<|z|<\beta$

则

$$kf(k) \longleftrightarrow -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(z) \quad , \ \alpha<|z|<\beta$$

例：求f(k)= k ε (k)的z变换F(z).

解：

$$\varepsilon(k) \longleftrightarrow \frac{z}{z-1}$$

$$k\varepsilon(k) \longleftrightarrow -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{z-1}\right) = -z\frac{(z-1)-z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

六、序列除(k+m)(z域积分)

若 $f(k) \longleftrightarrow F(z)$ ，$\alpha<|z|<\beta$，设有整数m，且k+m>0，

则
$$\frac{f(k)}{k+m} \longleftrightarrow z^m \int_z^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta^{m+1}} d\eta \qquad ,\alpha<|z|<\beta$$

若m=0 ,且k>0，则 $\dfrac{f(k)}{k} \longleftrightarrow \int_z^{\infty} \dfrac{F(\eta)}{\eta} d\eta$

例：求序列 $\dfrac{1}{k+1}\varepsilon(k)$ 的z变换。

解

$$\varepsilon(k) \longleftrightarrow \frac{z}{z-1}$$

$$\frac{1}{k+1}\varepsilon(k) \longleftrightarrow z\int_z^{\infty} \frac{\eta}{(\eta-1)\eta^2} d\eta = z\int_z^{\infty}\left(\frac{1}{\eta-1}-\frac{1}{\eta}\right)d\eta = z\ln\left(\frac{\eta-1}{\eta}\right)\Big|_z^{\infty} = z\ln\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

七、k域反转(仅适用双边z变换)

若 $f(k) \longleftrightarrow F(z)$, $\alpha < |z| < \beta$

则 $f(-k) \longleftrightarrow F(z^{-1})$, $1/\beta < |z| < 1/\alpha$

例：已知 $a^k\varepsilon(k) \longleftrightarrow \dfrac{z}{z-a}$ ，$|z| > a$

求 $a^{-k}\varepsilon(-k-1)$ 的z变换。

解 $a^{k-1}\varepsilon(k-1) \longleftrightarrow \dfrac{z^{-1}z}{z-a} = \dfrac{1}{z-1}$ ，$|z| > a$

$a^{-k-1}\varepsilon(-k-1) \longleftrightarrow \dfrac{1}{z^{-1}-a}$ ，$|z| < 1/a$

乘a得

$a^{-k}\varepsilon(-k-1) \longleftrightarrow \dfrac{a}{z^{-1}-a}$ ，$|z| < 1/a$

八、部分和

若 $f(k) \longleftrightarrow F(z)$，$\alpha < |z| < \beta$，则

$$\sum_{i=-\infty}^{k} f(i) \longleftrightarrow \frac{z}{z-1} F(z)$$ ，$\max(\alpha,1) < |z| < \beta$

证明

$$f(k) * \varepsilon(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)\varepsilon(k-i) = \sum_{i=-\infty}^{k} f(i) \longleftrightarrow \frac{z}{z-1} F(z)$$

例：求序列(a为实数) $\sum_{i=0}^{k} a^i$ $(k \geq 0)$的z变换。

解 $$\sum_{i=0}^{k} a^i = \sum_{i=-\infty}^{k} a^i \varepsilon(i) \longleftrightarrow \frac{z}{z-1}\frac{z}{z-a}$$ ，$|z| > \max(|a|,1)$

九、初值定理和终值定理

初值定理适用于右边序列，即适用于k<M(M为整数)时f(k)=0的序列。它用于由象函数直接求得序列的初值f(M),f(M+1),…，而不必求得原序列。

初值定理：

如果序列在k<M时，f(k)=0，它与象函数的关系为

$$f(k) \longleftrightarrow F(z)\ ,\quad \alpha<|z|<\infty$$

则序列的初值 $f(M)=\lim\limits_{z\to\infty} z^{m} F(z)$

对因果序列f(k)， $f(0)=\lim\limits_{z\to\infty} F(z)$

证明：

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

$$=\sum_{k=M}^{\infty} f(k)z^{-k}=f(M)z^{-M}+f(M+1)z^{-(M+1)}+f(M+2)z^{-(M+2)}+\ldots$$

两边乘z^M得

$$z^M F(z)=f(M)+f(M+1)z^{-1}+f(M+2)z^{-2}+\ldots$$

$$f(M)=\lim_{z\to\infty} z^m F(z)$$

终值定理：

终值定理适用于右边序列，用于由象函数直接求得序列的终值，而不必求得原序列。

如果序列在k<M时，f(k)=0，它与象函数的关系为

$$f(k) \longleftrightarrow F(z)\,,\quad \alpha<|z|<\infty \text{且} 0\le\alpha<1$$

含单位圆

则序列的终值

$$f(\infty)=\lim_{k\to\infty} f(k)=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}F(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$$

证明见299页。

6.3 逆z变换

一、逆z变换

设 $f(k) \leftrightarrow F(z)$

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) z^{-k}, \qquad \alpha < |z| < \beta$$

上式两边乘以z^{n-1}，n 为整数，在 $F(z)z^{n-1}$的收敛域内作围线积分：

$$\oint_c F(z) z^{n-1} dz = \oint_c \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) z^{-k+n-1} dz$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \oint_c z^{-k+n-1} dz$$

柯西公式：$\oint_c z^m dz = \begin{cases} 2\pi j, & m = -1 \\ 0, & m \neq -1 \end{cases}$

$$\therefore \oint_c z^{-k+n-1} dz = \begin{cases} 2\pi j, & -k+n-1=-1, \text{即} n=k \\ 0, & n \neq k \end{cases}$$

令 $n=k$，得：

$$2\pi j f(k) = \oint_c F(z) z^{k-1} dz,$$

$$f(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c F(z) z^{k-1} dz, \quad -\infty < k < \infty$$

上式称为 F(Z) 的 Z逆变换.

Z逆变换的计算方法：

(1) 反演积分法（留数法）；(2) 幂级数展开法；(3) 部分分式展开法；(4) 用 z 变换性质求 z 逆变换。

双边F (Z) + 收敛域 $\longleftrightarrow$ f(k)

一一对应

单边F (Z) $\longleftrightarrow$ f(k)

一般而言，双边序列f(k)可分解为因果序列$f_1(k)$和反因果序列$f_2(k)$两部分，即

$$f(k) = f_2(k)+f_1(k) = f(k)\varepsilon(-k-1) + f(k)\varepsilon(k)$$

相应地，其z变换也分为两部分

$$F(z) = F_2(z) + F_1(z), \quad \alpha< |z| <\beta$$

其中 $F_1(z)= Z[f(k)\varepsilon(k)]= \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$ ， $|z| > \alpha$

$F_2(z)=Z[f(k)\varepsilon(-k-1)]= \sum_{k=-\infty}^{-1} f(k)z^{-k}$ ， $|z| < \beta$

当已知象函数F(z)时，根据给定的收敛域不难由F(z)求得$F_1(z)$和$F_2(z)$，并分别求得它们所对应的原序列$f_1(k)$和$f_2(k)$，将两者相加得原序列f(k)。

二、幂级数展开法

根据z变换的定义，因果序列和反因果序列的象函数分别是z^{-1}和z的幂级数。其系数就是相应的序列值。

例：已知象函数 $$F(z)=\frac{z^2}{(z+1)(z-2)}=\frac{z^2}{z^2-z-2}$$

其收敛域如下，分别求其相对应的原序列f(k)。

（1） $|z| > 2$ (2) $|z|< 1$ (3) $1< |z| < 2$

解 （1） 由于F(z)的收敛域在半径为2的圆外，故f(k)为因果序列。用长除法将F(z)展开为z^{-1}的幂级数：

$$z^2/(z^2-z-2)=1+z^{-1}+3z^{-2}+5z^{-3}+\ldots$$

$$f(k)=\{\underset{\uparrow k=0}{1}, 1, 3, 5, \ldots\}$$

（2） 由于F(z)的收敛域为｜z｜<1，故f(k)为反因果序列。用长除法将F(z)（按升幂排列）展开为z的幂级数:

$$z^2/(-2-z-z^2)=-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{4}z^3-\frac{3}{8}z^4+\frac{5}{16}z^5+\cdots$$

$$f(k)=\left\{0,\frac{5}{16},-\frac{3}{8},\frac{1}{4},-\frac{1}{2},0\right\}\leftarrow k=-1$$

(3) F(z)的收敛域为1<|z|<2，其原序列f(k)为双边序列。将F(z)展开为部分分式，有

$$F(z)=\frac{\frac{1}{3}z}{z+1}+\frac{\frac{2}{3}z}{z-2}$$

第一项属于因果序列的项函数$F_1(z)$，第二项属于反因果序列的象函数$F_2(z)$，

$$F_1(z)=\frac{\frac{1}{3}z}{z+1}\quad,\quad |z|>1 \qquad F_2(z)=\frac{\frac{2}{3}z}{z-2}\quad,\quad |z|<2$$

即将它们分别展开为z^{-1}及z的幂级数，有

$$F_1(z)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}z^{-1}+\frac{1}{3}z^{-2}-\frac{1}{3}z^{-3}+\cdots \qquad F_2(z)=\cdots+\frac{1}{12}z^{3}-\frac{1}{6}z^{2}-\frac{1}{3}z$$

$$f(k)=\left\{\cdots,-\frac{1}{12},-\frac{1}{6},-\frac{1}{3},\underset{\uparrow}{\frac{1}{3}},-\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\cdots\right\}$$

难以写成闭合形式。

三、部分分式展开法

$$F(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+.....+b_1 z+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+.....+a_1 z+a_0}$$

式中m≤n

(1) F(z)均为单极点，且不为0

$\frac{F(z)}{z}$ 可展开为：$\frac{F(z)}{z}=\frac{K_0}{z}+\frac{K_1}{z-z_1}+....+\frac{K_n}{z-z_n}$

$$F(z)=K_0+\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i z}{z-z_i}$$

根据给定的收敛域，将上式划分为$F_1(z)$（$|z|>\alpha$）和$F_2(z)$（$|z|<\beta$）两部分，根据已知的变换对，如

$$\delta(k)\longleftrightarrow 1$$

$$a^k\varepsilon(k)\longleftrightarrow\frac{z}{z-a},\quad |z|>|a|$$

$$-a^k\varepsilon(-k-1)\longleftrightarrow\frac{z}{z-a},\quad |z|<|a|$$

例1：已知象函数 $F(z)=\dfrac{z^2}{(z+1)(z-2)}$

其收敛域分别为：（1） $|z|>2$ (2) $|z|<1$ (3) $1<|z|<2$

解 部分分式展开为

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{z}{(z+1)(z-2)}=\frac{\frac{1}{3}}{z+1}+\frac{\frac{2}{3}}{z-2}$$

$$F(z)=\frac{1}{3}\frac{z}{z+1}+\frac{2}{3}\frac{z}{z-2}$$

(1)当 $|z|>2$，故f(k)为因果序列 $f(k)=[\frac{1}{3}(-1)^k+\frac{2}{3}(2)^k]\varepsilon(k)$

(2) 当 $|z|<1$，故f(k)为反因果序列

$$f(k)=[-\frac{1}{3}(-1)^k-\frac{2}{3}(2)^k]\varepsilon(-k-1)$$

(3)当 $1<|z|<2$，

$$f(k)=\frac{1}{3}(-1)^k\varepsilon(k)-\frac{2}{3}(2)^k\varepsilon(-k-1)$$

例2：已知象函数

$$F(z)=\frac{z(z^3-4z^2+\frac{9}{2}z+\frac{1}{z})}{(z-\frac{1}{2})(z-1)(z-2)(z-3)}$$,1< |z| <2

的逆z变换。

解

$$F(z)=\frac{-z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{2z}{z-1}+\frac{-z}{z-2}+\frac{z}{z-3}$$

由收敛域可知，上式前两项的收敛域满足 |z| >1，后两项满足 |z| <2。

$$f(k)=(\frac{1}{2})^k\varepsilon(k)+2\varepsilon(k)+(2)^k\varepsilon(-k-1)-(3)^k\varepsilon(-k-1)$$

(2) F(z)有共轭单极点

如$z_{1,2}=c\pm jd=\alpha e^{\pm j\beta}$, 则
$$\frac{F(z)}{z}=\frac{K_1}{z-c-jd}+\frac{K_1^*}{z-c+jd}$$

令$K_1=|K_1|e^{j\theta}$
$$F(z)=\frac{|K_1|e^{j\theta}z}{z-\alpha e^{j\beta}}+\frac{|K_1|e^{-j\theta}z}{z-\alpha e^{-j\beta}}$$

若$|z|>\alpha$，$f(k)=2|K_1|\alpha^k\cos(\beta k+\theta)\varepsilon(k)$

若$|z|<\alpha$，$f(k)=-2|K_1|\alpha^k\cos(\beta k+\theta)\varepsilon(-k-1)$

(3) F(z)有重极点

F(z)展开式中含 $\frac{z}{(z-a)^r}$ 项(r>1)，则逆变换为

若$|z|>\alpha$,对应原序列为 $$\frac{k(k-1)\ldots..(k-r+2)}{(r-1)!}a^{k-r+1}\varepsilon(k)$$

以|z|>α为例：

当r=2时，为 $ka^{k-1}\varepsilon(k)$

当r=3时，为 $\frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}\varepsilon(k)$

可这样推导记忆：$Z[a^k\varepsilon(k)]=\dfrac{z}{z-a}$

两边对a求导得 $Z[ka^{k-1}\varepsilon(k)]=\dfrac{z}{(z-a)^2}$

再对a求导得 $Z[k(k-1)a^{k-2}\varepsilon(k)]=\dfrac{2z}{(z-a)^3}$

故 $Z[0.5k(k-1)a^{k-2}\varepsilon(k)]=\dfrac{z}{(z-a)^3}$

例：已知象函数 $F(z)=\dfrac{z^3+z^2}{(z-1)^3}$ ，$|z|>1$

的原函数。

解 $$\frac{F(z)}{z}=\frac{z^2+z}{(z-1)^3}=\frac{K_{11}}{(z-1)^3}+\frac{K_{12}}{(z-1)^2}+\frac{K_{13}}{z-1}$$

$$K_{11}=(z-1)^3\frac{F(z)}{z}\Big|_{z=1}=2 \qquad K_{12}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-1)^3\frac{F(z)}{z}\right]\Big|_{z=1}=3$$

$$K_{13}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[(z-1)^3\frac{F(z)}{z}\right]\Big|_{z=1}=1$$

$$F(z)=\frac{2z}{(z-1)^3}+\frac{3z}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-1}$$

f(k)=[k(k-1)+3k+1]ε(k)

四、用性质求Z逆变换

例1：$F(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$，$|z|>3$ 求逆变换$f(k)$

解：方法1：

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{1}{z(z-2)(z-3)}=\frac{\frac{1}{6}}{z}+\frac{-\frac{1}{2}}{z-2}+\frac{\frac{1}{3}}{z-3}$$

$$F(z)=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\frac{z}{z-2}+\frac{1}{3}\frac{z}{z-3}$$

$$f(k)=\frac{1}{6}\delta(k)-(\frac{1}{2}\times 2^{k}-\frac{1}{3}\times 3^{k})\varepsilon(k)$$

$$=\frac{1}{6}\delta(k)-(2^{k-1}-3^{k+1})\varepsilon(k)$$

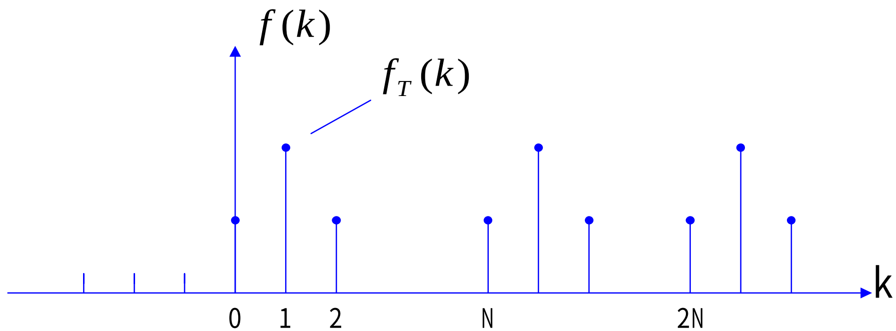
方法2：$F(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}=\dfrac{-1}{z-2}+\dfrac{1}{z-3}$

$$=z^{-1}\left(\frac{-z}{z-2}+\frac{z}{z-3}\right)$$

$$f(k)=-2^{k-1}\varepsilon(k-1)+3^{k-1}\varepsilon(k-1)$$

$$=(3^{k-1}-2^{k-1})\varepsilon(k-1)$$

例2、因果周期信号 $f(k)$ 如图，求 $f(k)$ 的单边 z 变换 $F(z)$



解：设第一周期内信号为 $f_T(k)$，则 $f(k)$ 可表示为

$$f(k) = f_T(k) + f_T(k-N) + f_T(k-2N) + \cdots$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} f_T(k-mN)$$

设 $f_T(k) \leftrightarrow F_T(z)$， $f(k) \leftrightarrow F(z)$

$$F(z) = F_T(z) + z^{-N} F_T(z) + z^{-2N} F_T(z) + \cdots$$

$$= F_T(z)(1 + z^{-N} + z^{-2N} + \cdots)$$

$$= \frac{F_T(z)}{1 - z^{-N}} \qquad |z| > 1$$

§7.4 离散系统的Z域分析

一、离散信号的Z域分解：

设 $f(k)$为因果信号，由单边 z逆变换，得

$$f(k)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c F(z)z^{k-1}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_c \frac{F(z)}{z}z^k dz,\qquad k\geq 0$$

C 为 $\dfrac{F(z)}{z}$ 收敛域中一条围线路径。

$F(z)$的逆变换的物理意义是：$f(k)$分解为围线 C 上不同 z 的指数信号 z^k的线性组合，其中，$\dfrac{1}{2\pi j}\dfrac{F(z)}{z}dz$ 为z^k的复幅度。

二、z^k 激励下系统的零状态响应：

$$f(k) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y_f(k) \qquad k_0 = 0$$

设LTI离散系统的输入 $f(k) = z^k$，零状态响应为 $y_f(k)$,单位响应为$h(k)$，$h(k)$ 为因果序列。

$$y_f(k) = f(k) * h(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i) z^{k-i}$$

$$= z^k \sum_{i=0}^{\infty} h(i) z^{-i} = z^k H(z)$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k}, \quad |z| > \alpha$$

$H(z)$称离散系统的**系统函数**。

三、任意离散信号f(k)激励下的零状态响应：

z^{-k} 产生的零状态响应表示为

$$z^{k} \rightarrow H(z)z^{k}$$

则 $(\frac{1}{2\pi j}\frac{F(z)}{z}dz)z^{k} \rightarrow (\frac{1}{2\pi j}\frac{F(z)}{z}dz)H(z)z^{k}$

$$f(k)=\oint_{c}(\frac{1}{2\pi j}\frac{F(z)}{z}dz)z^{k} \rightarrow \oint_{c}(\frac{1}{2\pi j}\frac{F(z)}{z}dz)H(z)z^{k}$$

即 $f(k)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{c}F(z)z^{k-1}dz \rightarrow \frac{1}{2\pi j}\oint_{c}F(z)H(z)z^{k-1}dz$

设 $f(k)$产生的零状态响应为 $y_f(k)$，则

$$y_f(k)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{c}F(z)H(z)z^{k-1}dz,\ \ k\geq 0$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_{c}Y_f(z)z^{k-1}dz,\ \ k\geq 0\ ,\qquad Y_f(z)=H(z)F(Z).$$

$$y_f(k) = f(k) * h(k)$$

$$\begin{cases} Y_f(z) = F(z)H(z) = Z[y_f(k)] \\ y_f(k) = Z^{-1}[Y_f(z)] \end{cases}$$

求$y_f(k)$的方法：

（1）求$F(z) = Z[f(k)]$;

（2）求 $H(z) = Z[h(k)]$;

（3）求$Y_f(z) = F(z)H(z)$;

（4）求$y_f(k) = Z^{-1}[Y_f(z)] = Z^{-1}[F(z)H(z)]$

例. 已知离散系统的输入 $f(k)=2^k\varepsilon(k)$，$h(k)=\varepsilon(k)$. 求零状态响应 $y_f(k)$.

解：$F(z)=Z[f(k)]=\dfrac{z}{z-2}$， $|z|>2$,

$$H(z)=Z[h(k)]=\frac{z}{z-1},\quad |z|>1,$$

$$Y_f(z)=F(z)H(z)=\frac{z^2}{(z-1)(z-2)},\quad |z|>2$$

$$=\frac{-z}{z-1}+\frac{2z}{z-2}$$

$$y_f(k)=-\varepsilon(k)+2\times 2^k\varepsilon(k)$$

$$=(2^{k+1}-1)\varepsilon(k)$$

§7.5　系统差分方程的Z域解

一、差分方程的Z域解：（LTI因果离散系统）

例　已知离散系统的方程为：

$$y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)=f(k-2)$$

$$y(-1)=1,\quad y(-2)=0,\quad f(k)=\varepsilon(k)$$

求：$y(k),\quad y_x(k),\quad y_f(k).$

1、求完全响应$y(k)$：

由单边z变换的右移性质：

$$f(k-m)\leftrightarrow z^{-m}F(z)+\sum_{k=0}^{m-1}f(k-m)z^{-k},$$

根据右移性质，对系统差分方程取单边 z 变换，得

$$Y(z)+3[z^{-1}Y(z)+\sum_{k=0}^{0}y(k-1)z^{-k}]+2[z^{-2}Y(z)+\sum_{k=0}^{1}y(k-2)z^{-k}]$$

$$=z^{-2}F(z)$$

由上式得：

$$Y(z)(1+3z^{-1}+2z^{-2})=(-3-2z^{-1})y(-1)-2y(-2)+z^{-2}F(z)$$

$$Y(z)=\frac{(-3-2z^{-1})y(-1)-2y(-2)}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}+\frac{z^{-2}}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}F(z)$$

$$=\frac{-3z^{3}+z^{2}+3z}{(z+1)(z-1)(z+2)},\quad F(z)=\frac{z}{z-1}$$

$$=\frac{1}{6}\frac{z}{(z-1)}+\frac{1}{2}\frac{z}{(z+1)}-\frac{11}{3}\frac{z}{(z+2)},\quad |z|>2$$

$$y(k)=\frac{1}{6}\times1^{k}+\frac{1}{2}\times(-1)^{k}-\frac{11}{3}(-2)^{k},\quad k\ge0$$

2、求零输入响应

$$y_x(k):\quad y_x(-1)=y(-1)=1,\quad y_x(-2)=y(-2)=0$$

$y_x(k)$的方程：$y_x(k)+3y_x(k-1)+2y_x(k-2)=0$

根据右移性质，对$y_x(k)$的方程取单边z变换，得：

$$Y_x(z)+3[z^{-1}Y_x(z)+\sum_{k=0}^{0}y_x(k-1)z^{-k}]+2[z^{-2}Y_x(z)+\sum_{k=0}^{1}y_x(k-2)z^{-k}]=0$$

由上式得：

$$Y_x(z)=\frac{(-3-2z^{-1})y_x(-1)-2y_x(-2)}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}=\frac{-3z^2-2z}{(z+1)(z+2)},\quad |z|>2$$

$$=\frac{z}{z+1}-\frac{4z}{z+2}$$

$$y_x(k)=(-1)^k-(-2)^{k+2},\quad k\geq 0$$

3、求 $y_f(k)$：　$f(k)=\varepsilon(k)$，$y_f(-1)=y_f(-2)=0$

$y_f(k)$的方程 $y_f(k)+3y_f(k-1)+2y_f(k-2)=f(k-2)$

由右移性质，对$y_f(k)$的方程取单边z变换，得

$$Y_f(z)+3z^{-1}y_f(z)+2z^{-2}Y_f(z)=z^{-2}F(z)$$

$$Y_f(z)=\frac{z^{-2}}{(1+3z^{-1}+2z^{-2})}F(z),\quad F(z)=\frac{z}{z-1}$$

$$=\frac{z}{(z+1)(z-1)(z+2)},\quad |z|>2$$

$$=\frac{1}{6}\frac{z}{(z-1)}-\frac{1}{2}\frac{z}{(z+1)}+\frac{1}{3}\frac{z}{(z+2)},$$

$$y_f(k)=[\frac{1}{6}\times 1^k-\frac{1}{2}(-1)^k+\frac{1}{3}(-2)^k]\varepsilon(k)$$

说明：前向差分方程的解法：

（1）用左移性质：$f(k+m) \leftrightarrow z^m F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k) z^{m-k}$，

初始条件：对 $y(k)$： $y(0)$、$y(1)$、 $\cdots$

对$y_x(k)$： $y_x(0)$、$y_x(1)$、 $\cdots$

（2）转变为由后向差分方程，用右移性质求解，

初始条件：对 $y(k)$： $y(-1)$、$y(-2)$、 $\cdots$

对$y_x(k)$： $y_x(-1)$、$y_x(-2)$、 $\cdots$

若初始条件不适用，则用递推法由相应的差分方程递推得到需要的初始条件。

二、系统函数H(z):

1、定义：$H(z)=\dfrac{Y_f(z)}{F(z)}$

$$Y_f(z)=Z[y_f(k)],\quad F(z)=Z[f(k)]$$

2、物理意义：

$$H(z)=Z[h(k)]$$

3、计算：

（1）$H(z)=\dfrac{Y_f(z)}{F(z)}$

（2）$H(z)=Z[h(k)]$

（3）由系统差分方程求$H(z)$

例：$y_f(k)+a_1y_f(k-1)+a_0y_f(k-2)=b_1f(k-1)+b_0f(k-2)$

$$Y_f(z)+a_1z^{-1}Y_f(z)+a_0z^{-2}Y_f(z)=b_1z^{-1}F(z)+b_0z^{-2}F(z)$$

$$(1+a_1z^{-1}+a_0z^{-2})Y_f(z)=(b_1z^{-1}+b_0z^{-2})F(z)$$

$$H(z)=\frac{Y_f(z)}{F(z)}=\frac{b_1z^{-1}+b_0z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_0z^{-2}}$$

$$=\frac{b_1z+b_0}{z^2+a_1z+a_0}$$

4、应用：

（1）求 $y_f(k)=Z^{-1}[Y_f(z)]$，$Y_f(z)=H(z)F(z)$;

（2）求 $h(k)=Z^{-1}[H(z)]$;

（3）求 $f(k)=Z^{-1}[F(z)]$，$F(z)=\dfrac{Y_f(z)}{H(z)}$;

（4）表示系统特性：频率特性、稳定性等

三、离散系统的频率响应：

1、LTI离散系统对正弦序列的响应：

设系统输入 $f(k)=A\cos\Omega Tk,\quad -\infty<k<\infty$

初始时刻$k_0=-\infty$

响应为$y(k)$

$f(k)$表示为：$f(k)=\dfrac{A}{2}(e^{j\Omega Tk}+e^{-j\Omega Tk})$

（1）系统对$e^{j\Omega Tk}$的响应：

设输入$f(k)=e^{j\Omega Tk}$，响应为$y_1(k)$

则 $y_1(k)=h(k)*e^{j\Omega Tk}=\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}h(m)e^{j\Omega T(k-m)}$

$$=e^{j\Omega Tk}\sum_{m=0}^{\infty}h(m)e^{-j\Omega Tm},(h(k)\text{为因果信号})$$

$$=e^{j\Omega Tk}\sum_{m=0}^{\infty}h(m)(e^{j\Omega T})^{-m}$$

设$H(z)=Z[h(k)]$的收敛域含单位圆，令 z 为

$$z=re^{j\theta}=e^{j\Omega T}$$

则 $y_1(k)=e^{j\Omega Tk}[\sum_{m=0}^{\infty}h(m)z^{-m}]_{z=e^{j\Omega T}}$

$$=e^{j\Omega Tk}H(z)|_{z=e^{j\Omega T}}=e^{j\Omega Tk}H(e^{j\Omega T})$$

（2）系统对$e^{-j\Omega Tk}$的响应：

设输入 $f(k)=e^{-j\Omega Tk}$的响应为$y_2(k)$，

$$y_2(k)=h(k)*e^{-j\Omega Tk}=e^{-j\Omega Tk}H^*(z)|_{z=e^{j\Omega T}}=e^{-j\Omega Tk}H^*(e^{j\Omega T})$$

其中，$H(z)$ 的收敛域含单位圆。

（3）系统对正弦序列的响应

系统输入 $f(k)=A\cos(\Omega Tk)=\frac{A}{2}(e^{j\Omega Tk}+e^{-j\Omega Tk})$

响应为 $y(k)$，由系统的线性性质，得

$$y(k)=\frac{A}{2}[y_1(k)+y_2(k)]$$

$$=\frac{A}{2}[e^{j\Omega Tk}H(e^{j\Omega T})+e^{-j\Omega Tk}H^*(e^{j\Omega T})]$$

设$H(e^{j\Omega T})=|H(e^{j\Omega T})|e^{j\phi(\Omega T)}$

则$H*(e^{j\Omega T})=|H(e^{j\Omega T})|e^{-j\phi(\Omega T)}$

$$y(k)=\frac{A}{2}|H(e^{j\Omega T})|[e^{j(\Omega Tk+\phi(\Omega T))}+e^{-j(\Omega Tk+\phi(\Omega T))}]$$

$$=A|H(e^{j\Omega T})|\cos(\Omega Tk+\phi(\Omega T)),\quad -\infty<k<\infty$$

一般情况：

$f(k)=A\cos(\Omega Tk+\theta)$

$y(k)=A|H(e^{j\Omega T})|\cos(\Omega Tk+\theta+\phi(\Omega T))$

$y(k)$称LTI离散系统的正弦稳态响应。

2、LTI离散系统的频率响应：

若LTI因果离散系统的系统函数H(z)的收敛域包含单位圆,$(|z|>\alpha,\alpha<1)$，则$H(e^{j\Omega T})$称为LTI因果离散系统的频率响应。其中

$$H(e^{j\Omega T})=H(z)|_{z=e^{j\Omega T}}$$

$$H(e^{j\Omega T})=|H(e^{j\Omega T})|e^{j\phi(\Omega T)}$$

$|H(e^{j\Omega T})|$称为系统的幅频响应

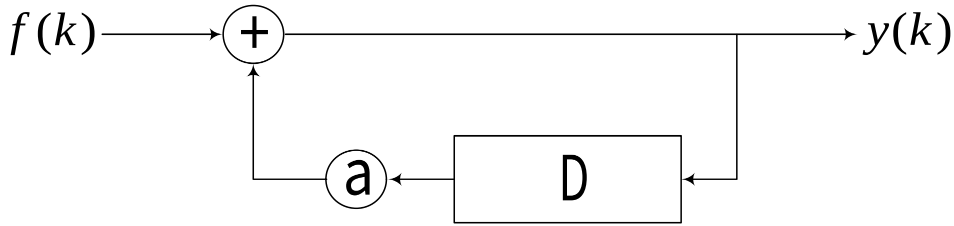
$\phi(\Omega T)$称为系统的相频响应

说明：（1）$H(e^{j\Omega T})$是ΩT的周期函数，周期为2π ；

（2）$H(e^{j\Omega T})$是ΩT的连续函数；

（3）$H(e^{j\Omega T})$表示系统对不同频率ΩT的正弦序列的稳态响应特性。

例1、已知离散系统如图所示，$0<a<1$求$H(e^{j\Omega T})$



解：系统差分方程为：

$$y(k)-ay(k-1)=f(k),\quad f(k)\text{为因果信号}$$

系统函数$H(z)$：

$$y_f(k)-ay_f(k-1)=f(k)$$

$$Y_f(z)-az^{-1}Y_f(z)=F(z)$$

$$H(z)=\frac{Y_f(z)}{F(z)}=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a},\quad |z|>a$$

因为$0<a<1$，所以$H(z)$的收敛域含单位圆，

系统的频率响应为：

$$H(e^{j\Omega T}) = H(z)\big|_{z=e^{j\Omega T}} = \frac{e^{j\Omega T}}{e^{j\Omega T} - a}$$

$$|H(e^{j\Omega T})| = \frac{1}{|e^{j\Omega T} - a|} = \frac{1}{|\cos\Omega T + j\sin\Omega T - a|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(\cos\Omega T - a)^2 + \sin^2\Omega T}}$$

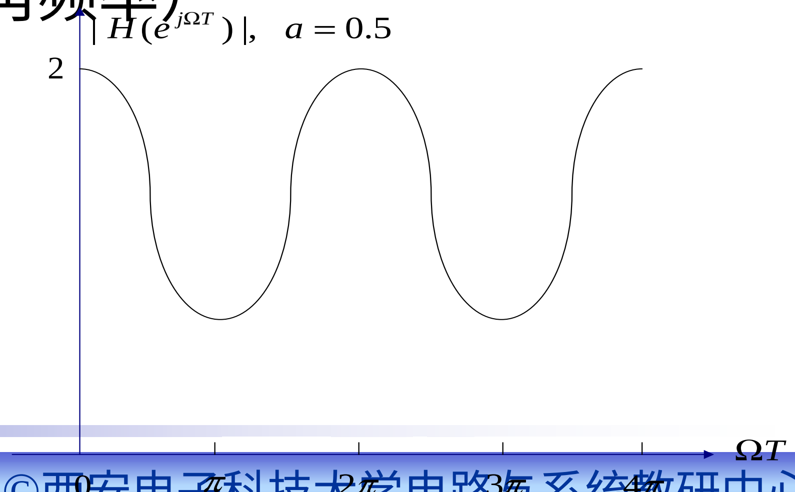
$$= \frac{1}{\sqrt{(1+a^2) - 2a\cos\Omega T}}$$

幅频响应曲线：（ΩT 称数字角频率）

$$\Omega T = 0,\quad |H(e^{j\Omega T})| = \frac{1}{1-a}$$

$$\Omega T = \pi,\quad |H(e^{j\Omega T})| = \frac{1}{1+a}$$

$$\Omega T = 2\pi,\quad |H(e^{j\Omega T})| = \frac{1}{1-a}$$



例2、已知离散系统的输入 $f(k)$ 为

$$f(k)=9+9\cos(\frac{\pi}{4}k)+9\cos(\frac{\pi}{2}k+\frac{\pi}{4}),\quad -\infty<k<\infty$$

系统函数为

$$H(z)=\frac{1}{2z+1},\quad |z|>\frac{1}{2},$$ 求稳态响应 $y(k)$

解：因为 $|z|>\frac{1}{2}$ ，所以 $H(z)$ 收敛域包含单位圆

$$H(e^{j\Omega T})=\frac{1}{2e^{j\Omega T}+1},$$

（1）设 $f_1(k)=9=9\cos(\Omega Tk)$，$\Omega T=0$

$$H(e^{j\Omega T})=\frac{1}{3}$$

设系统对 $f_1(k)$ 的响应为 $y_1(k)$，则

$$y_1(k)=9|H(e^{j\Omega T})|\cos[\Omega Tk+\phi(\Omega T)]=9\times\frac{1}{3}=3,\quad \Omega T=0$$

（2）设 $f_2(k)=9\cos(\frac{\pi}{4}k)$，$\Omega T=\frac{\pi}{4}$，

$$H(e^{j\Omega T})=\frac{1}{2e^{j\frac{\pi}{4}}+1}=0.36\angle-30.3^\circ$$

设系统对 $f_2(k)$的响应为 $y_2(k)$，则

$$y_2(k)=9|H(e^{j\Omega T})|\cos[\Omega Tk+\phi(\Omega T)],\quad \Omega T=\frac{\pi}{4}$$

$$=9\times0.36\cos(\frac{\pi}{4}k-30.3^\circ)$$

$$=3.24\cos(\frac{\pi}{4}k-30.3)$$

（3）设 $f_3(k)=9\cos(\frac{\pi}{2}k+\frac{\pi}{4})$，$\Omega T=\frac{\pi}{2}$

$$H(e^{j\Omega T})=\frac{1}{2e^{j\frac{\pi}{2}}+1}=\frac{1}{1+j2}=0.45\angle-63.4^\circ$$

设系统对 $f_3(k)$的响应为$y_3(k)$，则

$$y_3(k) = 9|H(e^{j\Omega T})|\cos[\Omega Tk + \frac{\pi}{4} + \phi(\Omega T), \quad \Omega T = \frac{\pi}{2},$$

$$= 9 \times 0.45\cos[\frac{\pi}{2}k + \frac{\pi}{4} - 63.4^\circ)$$

$$= 4.05\cos(\frac{\pi}{2}k - 18.4^\circ)$$

（4）系统对$f(k)$的响应$y(k)$：

$$y(k) = y_1(k) + y_2(k) + y_3(k)$$

$$= 3 + 3.24\cos(\frac{\pi}{4}k - 30.3^\circ) + 4.05\cos(\frac{\pi}{2}k - 18.4^\circ)$$

$$-\infty < k < \infty$$

§7.6 离散系统的表示和模拟

一、方框图法：

1、简单方框图表示：

$$f(k) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y(k)$$

2、系统的串、并联：（LTI因果系统）

串联：

$$f(k) \longrightarrow \boxed{h_1(k)} \longrightarrow \boxed{h_2(k)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boxed{h_n(k)} \longrightarrow y(k)$$

$$F(z) \longrightarrow \boxed{H_1(z)} \longrightarrow \boxed{H_2(z)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boxed{H_n(z)} \longrightarrow Y(z)$$

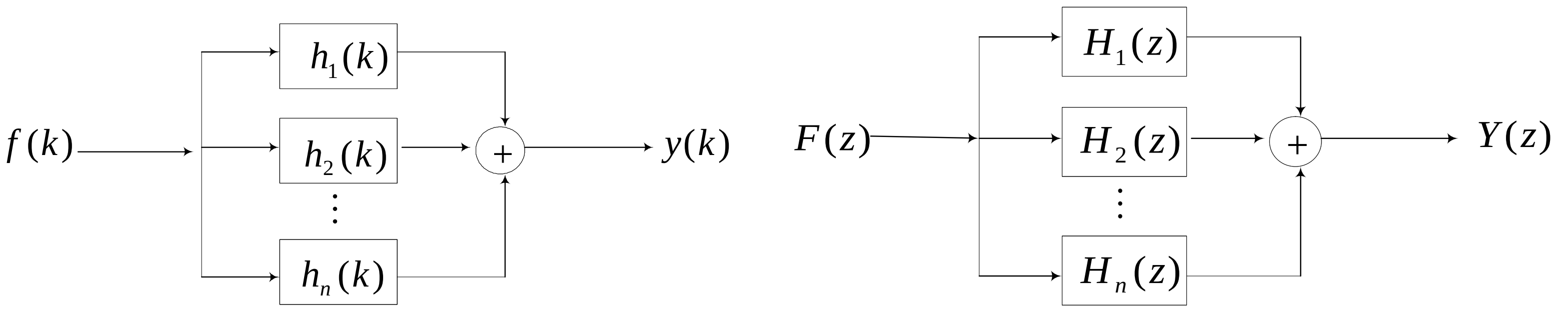
$$h_i(k) \leftrightarrow H_i(z), \quad i = 1,2,\cdots n$$

设串联复合系统的冲激响应为$h(k)$，$h(k) \leftrightarrow H(z)$

则 $h(k) = h_1(k) * h_2(k) * \cdots * h_n(k)$

$$H(z) = H_1(z) * H_2(z) * \cdots * H_n(z)$$

并联：



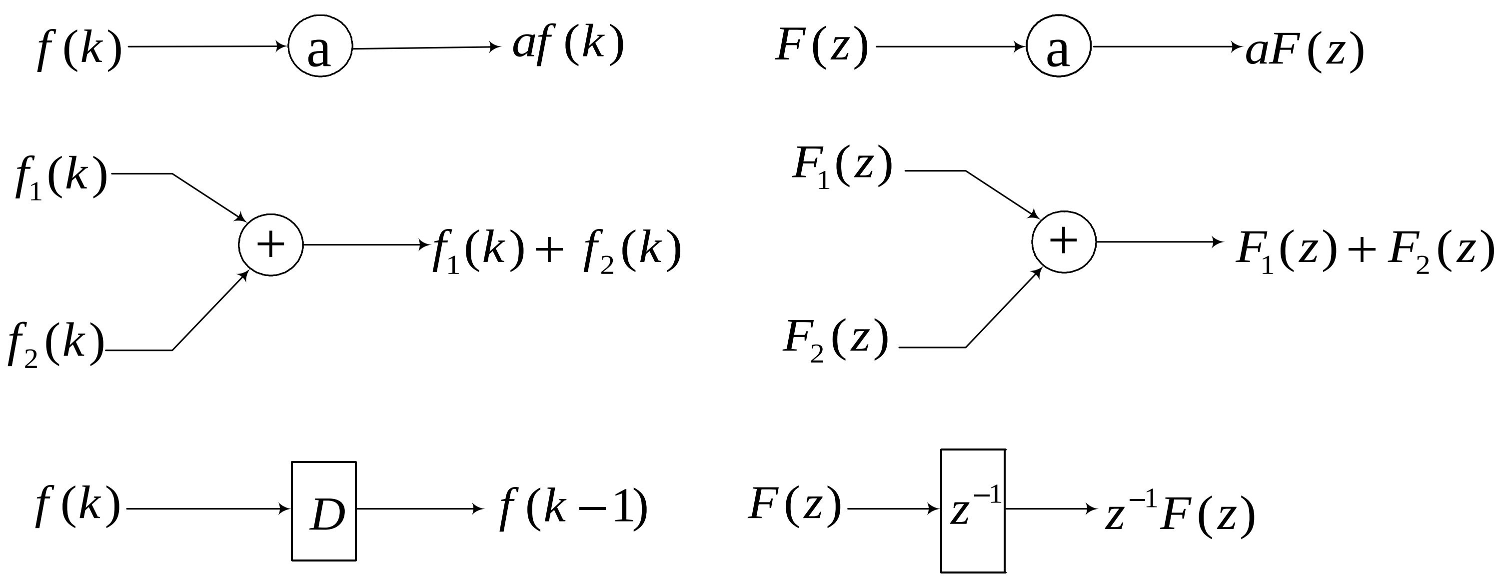
设并联复合系统的冲激响应为 $h(k)$，$h(k) \leftrightarrow H(z)$

则 $h(k) = h_1(k) + h_2(k) + \cdots + h_n(k)$

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) + \cdots + H_n(z)$$

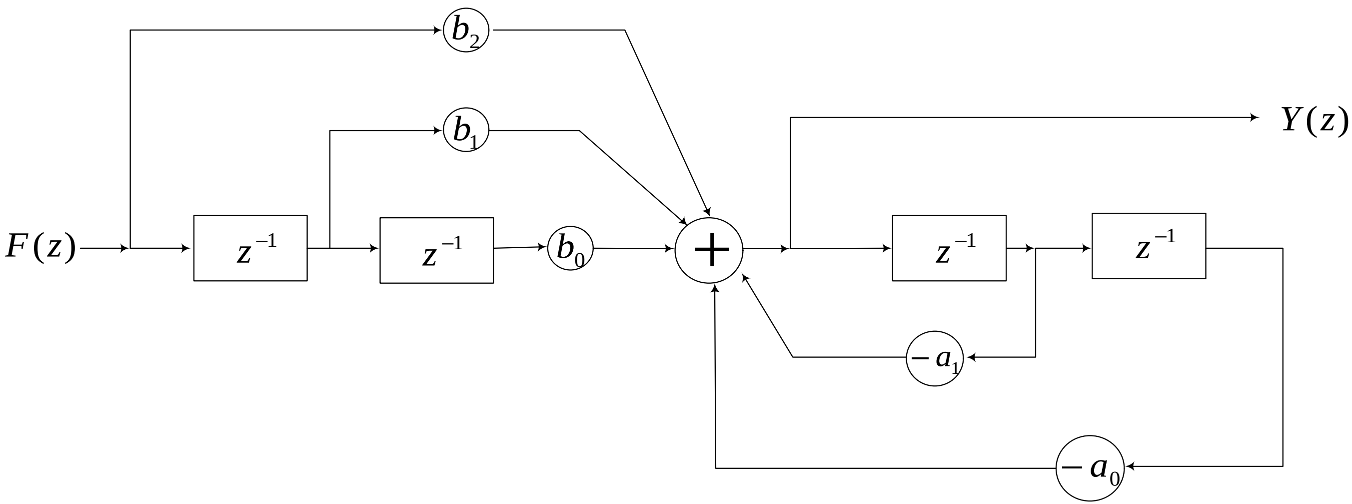
3、用基本运算器表示系统：

基本运算器：



$$f(-1)=0$$

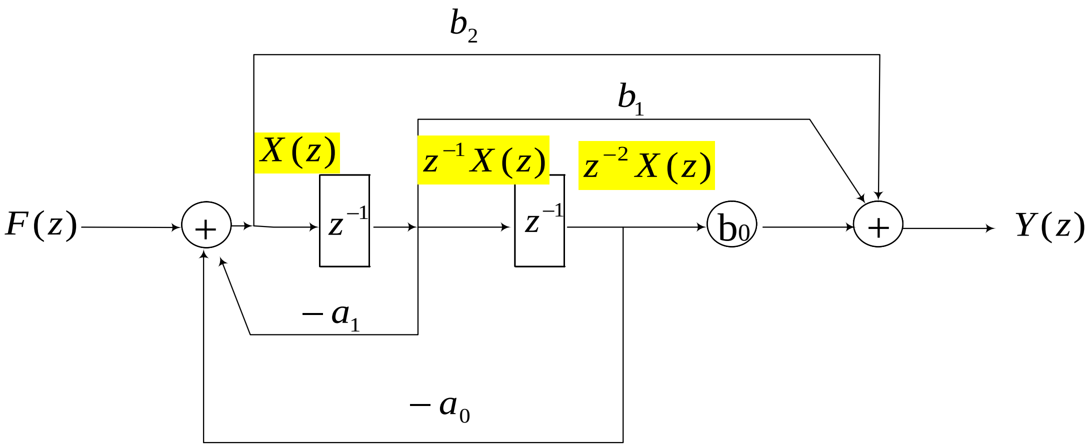
例1 图示离散系统，求系统差分方程。



$$Y(z) = -a_1 z^{-1} Y(z) - a_0 z^{-2} Y(z) + b_2 F(z) + b_1 z^{-1} F(z) + b_0 z^{-2} F(z)$$

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_0 y(k-2) = b_2 f(k) + b_1 f(k-1) + b_0 f(k-2)$$

例2 图示离散系统，求系统差分方程



$$X(z) = -a_1 z^{-1} X(z) - a_0 z^{-2} X(z) + F(z)$$

$$X(z) = \frac{F(z)}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}}, \quad \text{------------------------} \quad (1)$$

$$Y(z) = b_2 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + b_0 z^{-2} X(z) \quad \text{-------} \quad (2)$$

（1）式代入（2）式得：

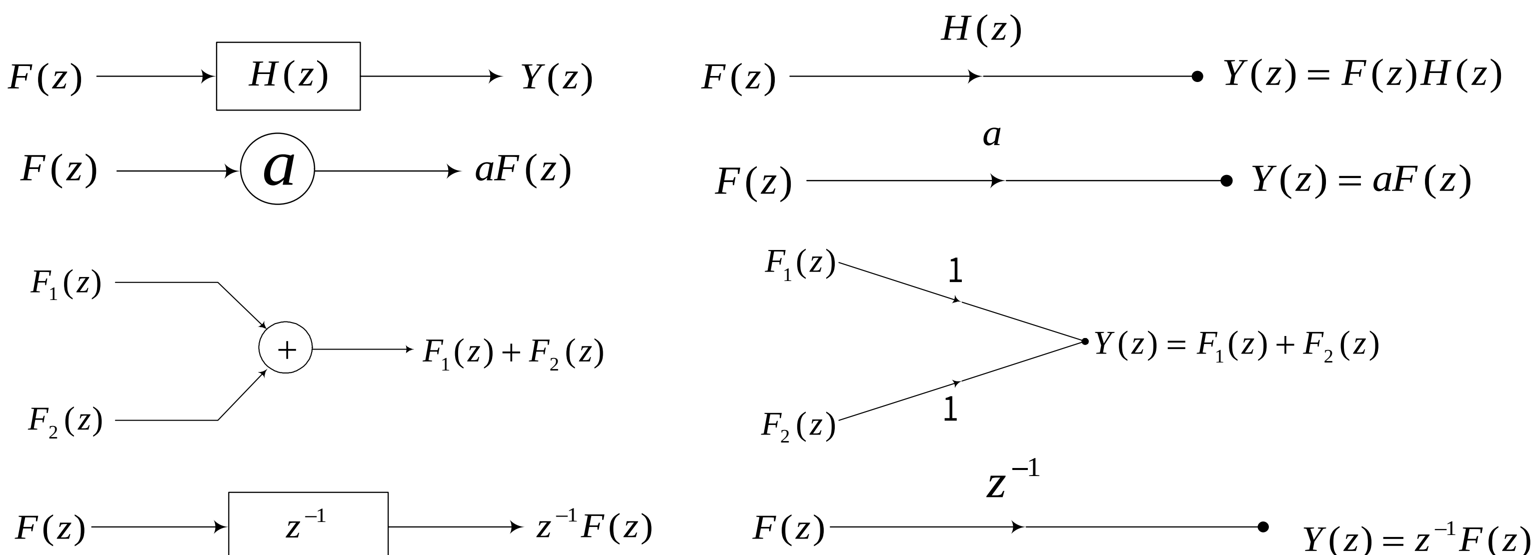
$$Y(z)=\frac{b_2+b_1z^{-1}+b_0z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_0z^{-2}}F(z)$$

$$(1+a_1z^{-1}+a_0z^{-2})Y(z)=(b_2+b_1z^{-1}+b_0z^{-2})F(z)$$

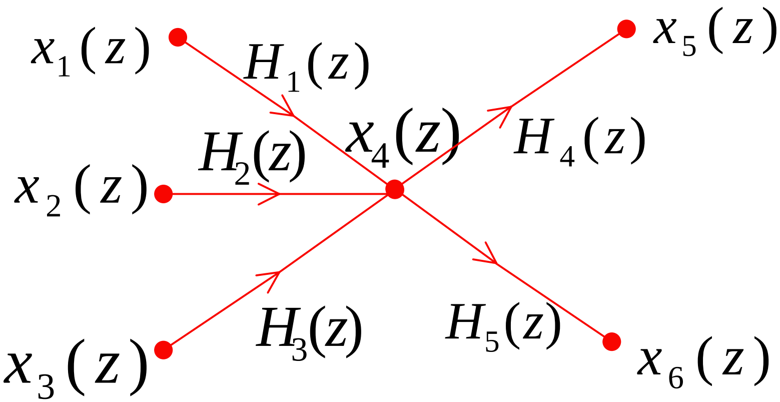
$$y(k)+a_1y(k-1)+a_0y(k-2)=b_2f(k)+b_1f(k-1)+b_0f(k-2)$$

二、离散系统的信号流图表示：

1、框图表示与信号流图对应关系：



2、信号流图规则：同于连续系统信号流图规则

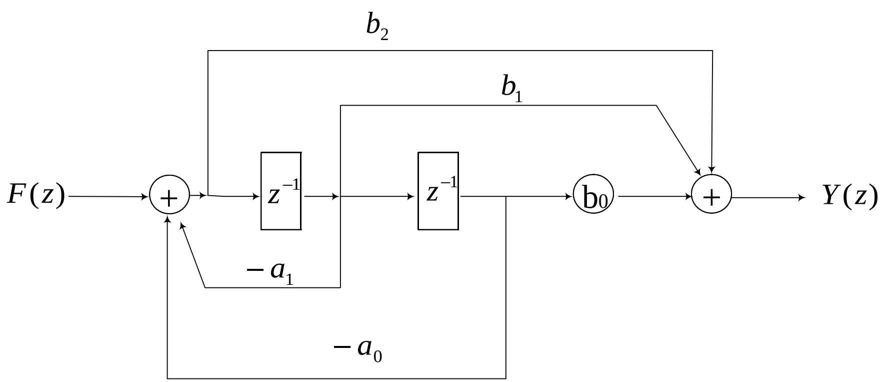


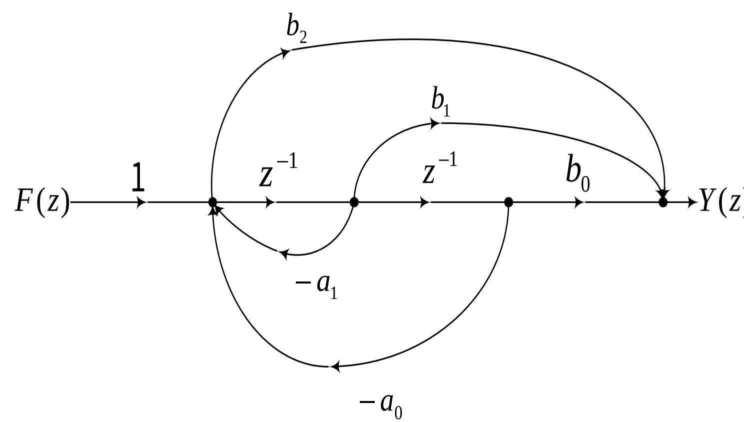
$$X_4(z)=H_1(z)X_1(z)+H_2(z)X_2(z)+H_3(z)X_3(z)$$

$$X_5(z)=H_4(z)X_4(z)$$

$$X_6(z)=H_5(z)X_4(z)$$

3、从框图表示到信号流图表示：





方法：（1）选加法器输出、单位延迟器输出，$F(z)$、$Y(z)$为变量用点表示；

（2）根据信号流图规定和框图中信号传输关系画出信号流图。

4、梅森公式：

设LTI离散系统的输入为$f(k)$，零状态响应为$y_f(k)$

$f(k) \leftrightarrow F(z)$，$y_f(k) \leftrightarrow Y_f(z)$ （单边Z变换对）

$$H(z)=\frac{Y_f(z)}{F(z)}=\frac{\sum_{i=1}^{m} P_i\Delta_i}{\Delta}$$

Δ ：流图行列式

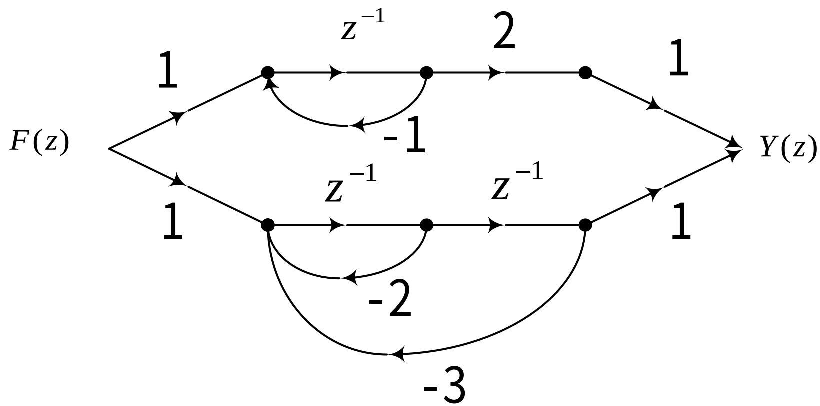
$$\Delta = 1-\sum L_i + \sum_{i,j} L_i L_j - \sum L_l L_p L_q + \cdots$$

Δ_i ：除去第 i 条开路后剩余流图的流图行列式；

P_i ：第 i 条开路的开路传输函数；

m ：从 $F(z)$到$Y_f(z)$的开路数

例、图示离散系统，求系统函数 $H(z)$



解：（1）流图的环传输函数 L_i 及 Δ ：

$$L_1=-z^{-1},\quad L_2=-2z^{-1},\quad L_3=-3z^{-2}$$

两个不接触环的环传输函数：

$$L_{12}=L_1L_2=2z^{-2},\quad L_{13}=L_1L_3=3z^{-3}$$

$$\Delta=1-\sum_i L_i+\sum_{i,j}L_iL_j-\cdots$$

$$=1-(-z^{-1}-2z^{-1}-3z^{-2})+(2z^{-2}+3z^{-3})$$

$$=1+3z^{-1}+5z^{-2}+3z^{-3}$$

（2）流图的开路传输函数 P_i 及 Δ_i：

$$P_1=2z^{-1},\ \Delta_1=1-(L_2+L_3)=1+2z^{-1}+3z^{-2}$$

$$P_2=z^{-2},\ \Delta_2=1-L_1=1+z^{-1}$$

（3）由梅森公式求$H(z)$

$$H(z)=\frac{\sum_{i=1}^{2}P_i\Delta_i}{\Delta}=\frac{2z^{-1}(1+2z^{-1}+3z^{-2})+z^{-2}(1+z^{-1})}{1+3z^{-1}+5z^{-2}+3z^{-3}}$$

$$=\frac{2z^2+5z+7}{z^3+3z^2+5z+3}$$

三、离散系统的模拟：

1、由H(z) ⟶ 差分方程 ⟶ 框图 ⟶ 流图

例1 已知系统函数$H(z)=\dfrac{b_0}{z^2+a_1z+a_0}$，画出系统框图

解：设 $f(k)\leftrightarrow F(z),\quad y_f(z)\leftrightarrow Y_f(z)$

$$H(z)=\frac{Y_f(z)}{F(z)}=\frac{b_0z^2}{z^2+a_1z+a_0}=\frac{b_0}{1+a_1z^{-1}+a_0z^{-2}}$$

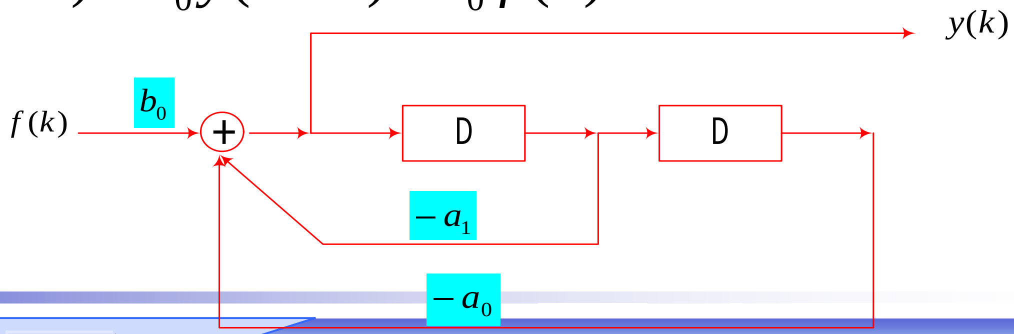
$$(1+a_1z^{-1}+a_0z^{-2})Y_f(z)=b_0F(z)$$

$$y_f(k)+a_1y_f(k-1)+a_0y_f(k-2)=b_0f(k)$$

$$y(k)+a_1y(k-1)+a_0y(k-2)=b_0f(k)$$

$$y(k)=-a_1y(k-1)-a_0y(k-2)+b_0f(k)$$

由上式得框图：



例2、已知系统函数 $H(z)=\dfrac{b_1z+b_0}{z^2+a_1z+a_0}$，求系统框图

解：$H(z)=\dfrac{b_1z^{-1}+b_0z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_0z^{-2}}$

设 $f(k)\leftrightarrow F(z),\quad y_f(k)\leftrightarrow Y_f(z)$

$$Y_f(z)=H(z)F(z)$$

$$(1+a_1z^{-1}+a_0z^{-2})Y_f(z)=(b_1z^{-1}+b_0z^{-2})F(z)$$

$$y_f(k)+a_1y_f(k-1)+a_0y_f(k-2)=b_1f(k-1)+b_0f(k-2)$$

$$y(k)+a_1y(k-1)+a_0y(k-2)=b_1f(k-1)+b_0f(k-2) \quad \text{---}\ (1)$$

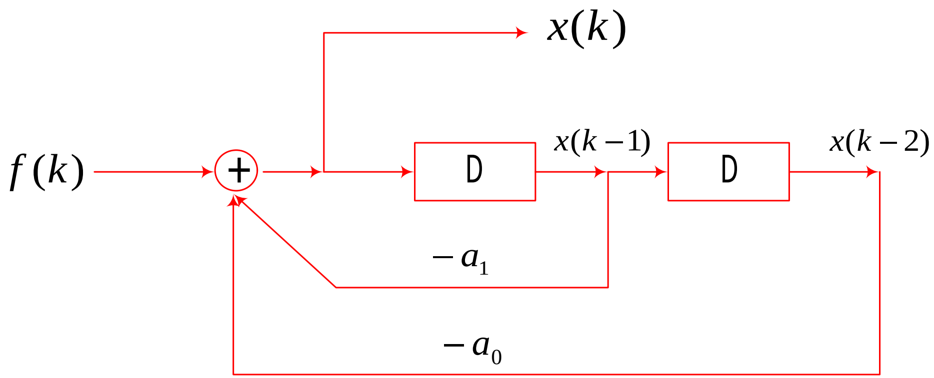
引入辅助函数$X(k)$，令

$$X(k)+a_1X(k-1)+a_0X(k-2)=f(k) \text{ ------------ }(2)$$

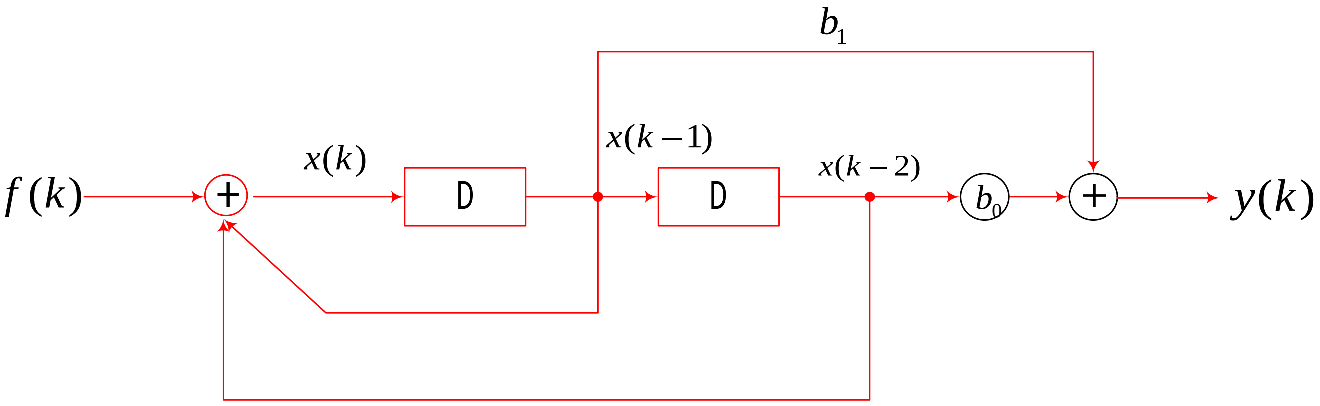
（2）式代入（1）式，比较等式两边得

$$y(k)=b_1X(k-1)+b_0X(k-2) \quad \text{------------------ }(3)$$

先模拟（2）式对应的框图，然后在（2）式框图基础上画出（3）式的框图



(2)式框图

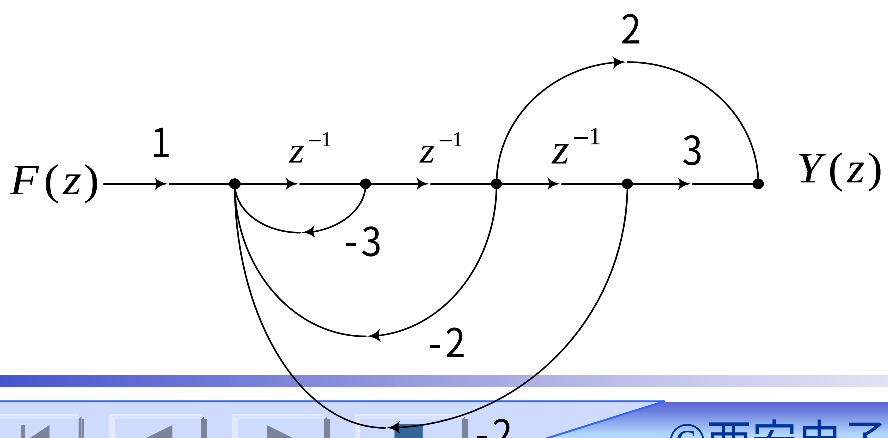


2、由H(z)→信号流图→系统框图

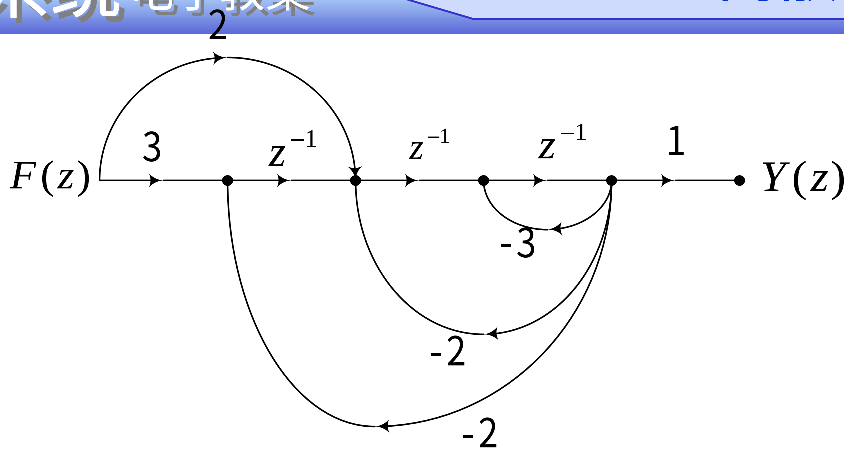
（1）直接形式：

例1、$H(z)=\dfrac{2z+3}{z^3+3z^2+2z+2}=\dfrac{2z^{-2}+3z^{-3}}{1-(-3z^{-1}-2z^{-2}-2z^{-3})}$

根据梅森公式，系统信号流图有3个相互接触的环和两条开路组成，环传输函数分别为$L_1=-3z^{-1}$ 、$L_2=-2z^{-2}$、$L_3=-2z^{-3}$ ；开路传输函数为$P_1=2z^{-2}$、$P_2=3z^{-3}$ 、$\Delta_1=1,\Delta_2=1$信号流图如图所示



(a)直接形式1



(b)直接形式2

（2）串联形式：

例2、$H(z)=\dfrac{z^2+z}{z^2+5z+6}=\dfrac{z}{z+2}\cdot\dfrac{(z+1)}{(z+3)}=H_1(z)\cdot H_2(z)$

$$H_1(z)=\frac{z}{z+2},\quad H_2(z)=\frac{z+1}{z+3}$$

分别对$H_1(z)$、$H_2(z)$用直接形式信号流图模拟，然后联接成串联形式

（3）并联形式：

例3、$H(z)=\dfrac{z^2+4z+4}{z^2+7z+12}=\dfrac{1}{z+3}+\dfrac{z}{z+4}$

$$=H_1(z)+H_2(z)$$

$$H_1(z)=\frac{1}{z+3},\quad H_2(z)=\frac{z}{z+4}$$

分别 $H_1(z)$和 $H_2(z)$用直接形式信号流图模拟，然后联接成并联形式

§7.7 系统函数与系统特性

一、H(z)的零、极点：

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0}$$

$$=\frac{b_m(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_m)}{(z-P_1)(z-P_2)\cdots(z-P_n)}$$

$$=\frac{b_m\prod_{j=1}^{m}(z-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(z-P_i)},\qquad m\le n$$

z_j —— **H(z)的零点**，P_i —— **H(z)的极点**

b_j、a_i 为实数，H(z)通常为有理分式。

若零点或极点为复数，则零点或极点必共轭。

二、H(z)的零、极点与h(k)的关系：

1、单位圆内的极点：

在实轴上：一阶极点：$\frac{Az}{z-a} \to Aa^k\varepsilon(k),\quad |a|<1$

二阶极点：$\frac{Az}{(z-a)^2} \to Aka^k\varepsilon(k)$

不在实轴上：一阶极点：$\frac{A_1 z}{z-re^{j\beta}} + \frac{A_1^* z}{z-re^{-j\beta}} \qquad r<1$

$$\to 2|A_1|r^k\cos(\beta k+\theta)\varepsilon(k)$$

二阶极点：$\frac{A_1 z}{(z-re^{j\beta})^2} + \frac{A_1^* z}{(z-re^{-j\beta})^2}$

$$\to 2|A_1|r^{k-1}\cos[\beta(k-1)+\theta]\varepsilon(k)$$

2、单位圆上的极点：

在实轴上：$\dfrac{Az}{z\pm 1} \leftrightarrow A(\pm 1)^k \varepsilon(k)$

$$\frac{Az}{(z\pm 1)^2} \leftrightarrow Ak(\pm 1)^k \varepsilon(k)$$

不在实轴上：$\dfrac{Az}{z-re^{j\beta}} + \dfrac{A^*z}{z-re^{-j\beta}} \leftrightarrow 2|A|\cos(\beta k+\theta)\varepsilon(k)$

$$\frac{Az}{(z-re^{j\beta})^2} + \frac{A^*z}{(z-re^{-j\beta})^2} \leftrightarrow 2|A|k\cos[\beta(k-1)+\theta]\varepsilon(k)$$

3、单位圆外的极点：

在实轴上：$\dfrac{Az}{z-a} \leftrightarrow Aa^k \varepsilon(k),\quad |a|>1$

$$\frac{Az}{(z-a)^2} \leftrightarrow Aka^{k-1}\varepsilon(k)$$

不在实轴上：$\dfrac{Az}{z-re^{j\beta}} + \dfrac{A^*z}{z-re^{-j\beta}} \leftrightarrow 2|A|r^k\cos(\beta k+\theta)\varepsilon(k), r>1$

结论：（1）H(z)的极点在单位圆内，对应h(k)按指数规律衰减；

（2）H(z)的极点在单位圆上
一阶极点对应h(k)为阶跃序列或正弦序列；
二阶及二阶以上极点对应h(k)增长。

（3）H(z)的极点在单位圆外，对应h(k)按指数规律增长。

三、H(z)与系统频率响应：

设H(z)的收敛域包含单位圆，对因果系统，**H(z)的极点全部在单位圆内**，则系统的频率响应为： $H(e^{j\Omega T}) = H(z)|_{z=e^{j\Omega T}}$

设 $H(z) = \dfrac{b_m \prod_{i=1}^{m}(z - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(z - P_i)}$

则 $H(e^{j\Omega T}) = \dfrac{b_m \prod_{i=1}^{m}(e^{j\Omega T} - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(e^{j\Omega T} - P_i)}$

令 $e^{j\Omega T} - z_i = B_i e^{j\psi_i}$， $e^{j\Omega T} - P_i = A_i e^{j\theta_i}$

则 $H(e^{j\Omega T}) = \dfrac{b_m \prod_{i=1}^{m} B_i e^{j\psi_i}}{\prod_{i=1}^{n} A_i e^{j\theta_i}} = |H(e^{j\Omega T})| e^{j\phi(\Omega T)}$

$$|H(e^{j\Omega T})| = \frac{b_m B_1 B_2 \cdots B_m}{A_1 A_2 \cdots A_n}$$

$$\phi(\Omega T) = (\psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_m) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)$$

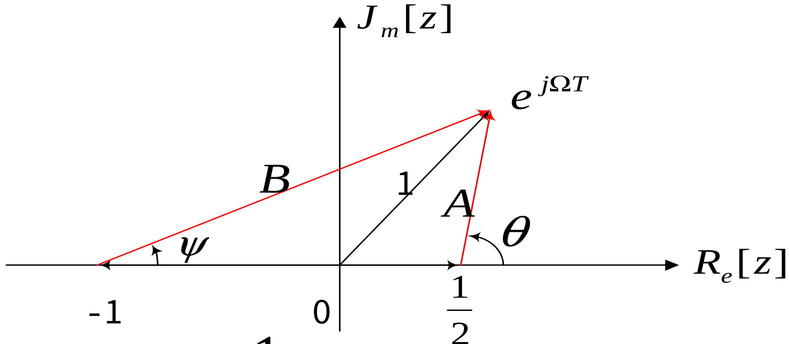
例：$H(z) = \dfrac{z+1}{2z-1}, \quad |z| > \dfrac{1}{2}$，画出系统幅频响应曲线

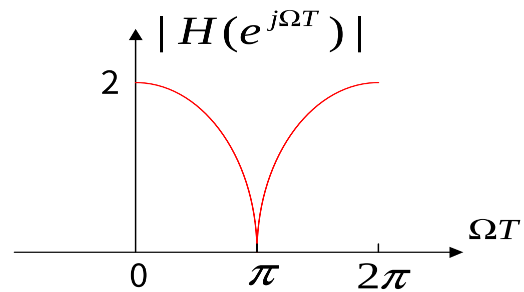
解：因为H(z)的收敛域为$|z| > \dfrac{1}{2}$,故系统频率响应为：

$$H(e^{j\Omega T}) = \frac{e^{j\Omega T} + 1}{2(e^{j\Omega T} - \frac{1}{2})},$$

令$e^{j\Omega T} + 1 = e^{j\Omega T} - (-1) = Be^{j\psi}, \quad e^{j\Omega T} - \dfrac{1}{2} = Ae^{j\theta}$

把$Be^{j\psi}$ 和 $Ae^{j\theta}$ 画在Z复平面上，如图所示：





$$\Omega T=0: A=\frac{1}{2},\quad B=2,\quad \psi=0,\quad \theta=0$$

$$|H(e^{j\Omega T})|=\frac{B}{2A}=2,\quad \phi(\Omega T)=\psi-\theta=0$$

$$\Omega T\uparrow:\quad A\uparrow,\quad B\downarrow,\quad \psi\uparrow,\quad \theta\uparrow$$

$$\Omega T=\pi: A=\frac{3}{2},\quad B=0,\quad \psi=\frac{\pi}{2},\quad \theta=\pi$$

$$|H(e^{j\Omega T})|=0,\quad \phi(\Omega T)=-\frac{\pi}{2}$$

$$\Omega T\uparrow:\quad A\downarrow,\quad B\uparrow,\quad \psi\uparrow,\quad \theta\uparrow$$

$$\Omega T=2\pi: A=\frac{1}{2},\quad B=2,\quad \psi=2\pi,\quad \theta=2\pi \qquad |H(e^{j\Omega T})|=2,\quad \phi(\Omega T)=0$$

四、H(z)与离散系统稳定性：

1、离散稳定系统的定义：（LTI离散系统）

一个离散系统，对任意有界输入f(k)，系统的零状态响应$y_f(k)$也有界，则称系统为有界输入有界输出意义下的稳定系统。

表示：若 $|f(k)| < M_f$， $0 < M_f < \infty$

且 $|y_f(k)| < M_y$， $0 < M_y < \infty$

则系统为稳定系统。

2、离散系统稳定的充要条件：

设系统的单位响应为h(k)

充要条件：$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$

证明：（1）充分性：设$|f(k)|<M_f$

$$y_f(k)=h(k)*f(k)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)f(k-m)$$

$$|y_f(k)|=|\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)f(k-m)|\le\sum_{m=-\infty}^{\infty}|h(m)|\cdot|f(k-m)|$$

即 $|y_f(k)|\le M_f\sum_{m=-\infty}^{\infty}|h(m)|$

若 $\sum_{m=-\infty}^{\infty}|h(m)|<\infty$

则 $|y_f(k)|<\infty$

（2）必要性：

必要性是指：若$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)|=\infty$，则至少有一个

有界输入$f(k)$产生无界输出$y_f(k)$

设$f(k)=\mathrm{sgn}[h(r-k)]$，$r$为一整数

则 $y_f(k)=f(k)*h(k)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)f(k-m)$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)\mathrm{sgn}[h(r-k+m)]$$

令 $k=r$，得：

$$y_f(r)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)\mathrm{sgn}[h(m)]$$

$$\because \mathrm{sgn}[h(m)]=\begin{cases}1\ , & h(m)>0\\ 0\ , & h(m)=0\\ -1, & h(m)<0\end{cases}$$

$$\therefore h(m)\mathrm{sgn}[h(m)]=|h(m)|$$

$$y_f(r)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}|h(m)|$$

若 $\sum_{m=-\infty}^{\infty}|h(m)|=\infty$

则 $y_f(r)=\infty$

即$y_f(k)$无界。

3、离散系统稳定性判别：

（1）离散系统稳定性的Z域充要条件：

若LTI因果离散系统的系统函数H(z)的极点全部在单位圆内，则系统为稳定系统

(2)朱里准则：

朱里排列：设 $H(z)=\dfrac{B(z)}{A(z)}$ ，z的正幂分式

$$A(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0$$

对系数 a_i 排列如下：

行：

1	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	$\cdots$	a_1	a_0
2	a_0	a_1	a_2	$\cdots$	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
3	C_{n-1}	C_{n-2}	C_{n-3}	$\cdots$	C_1	C_0	
4	C_0	C_1	C_2	$\cdots$	C_{n-2}	C_{n-1}	
5	d_{n-2}	d_{n-3}	d_{n-4}	$\cdots$	d_0		
6	d_0	d_1	d_2	$\cdots$	d_{n-2}		
$\vdots$		$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$		
$2n-3$	r_2	r_1	r_0				

$$C_{n-1}=\begin{vmatrix} a_n & a_0 \\ a_0 & a_n \end{vmatrix},\quad C_{n-2}=\begin{vmatrix} a_n & a_1 \\ a_0 & a_{n-1} \end{vmatrix},\quad C_{n-3}=\begin{vmatrix} a_n & a_2 \\ a_0 & a_{n-2} \end{vmatrix},\cdots$$

$$d_{n-2}=\begin{vmatrix} C_{n-1} & C_0 \\ C_0 & C_{n-1} \end{vmatrix},\quad d_{n-3}=\begin{vmatrix} C_{n-1} & C_1 \\ C_0 & C_{n-2} \end{vmatrix},\quad d_{n-4}=\begin{vmatrix} C_{n-1} & C_2 \\ C_0 & C_{n-3} \end{vmatrix},\cdots$$

朱里准则：

$$\text{若}\ A(1)=A(z)|_{z=1}>0,$$

$$(-1)^n A(-1)>0,$$

$$a_n>|a_0|,$$

$$C_{n-1}>|C_0|,$$

$$d_{n-2}>|d_0|,$$

$$\cdots\cdots$$

$$r_2>|r_0|.$$

则H(z)的极点全部在单位圆内，系统稳定。

例、$H(z)=\dfrac{12z^2+6z+1}{12z^3-4z^2-3z+1}$，判断系统是否稳定。

6.4 z域分析

单边z变换将系统的初始条件自然地包含于其代数方程中，可求得零输入、零状态响应和全响应。

一、差分方程的变换解

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} y(k-i) = \sum_{j=0}^{m} b_{m-j} f(k-j)$$

设f(k)在k=0时接入，系统初始状态为y(-1),y(-2),…y(-n)。

取单边z变换得

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}[z^{-i}Y(z) + \sum_{k=0}^{i-1} y(k-i)z^{-i}] = \sum_{j=0}^{m} b_{m-j}[z^{-j}F(z)]$$

$$[\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} z^{-i}]Y(z) + \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}[\sum_{k=0}^{i-1} y(k-i)z^{-k}] = (\sum_{j=0}^{m} b_{m-j} z^{-j})F(z)$$

6.4 z域分析

单边z变换将系统的初始条件自然地包含于其代数方程中，可求得零输入、零状态响应和全响应。

一、差分方程的变换解

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} y(k-i) = \sum_{j=0}^{m} b_{m-j} f(k-j)$$

设f(k)在k=0时接入，系统初始状态为y(-1),y(-2),…y(-n)。

取单边z变换得

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}[z^{-i}Y(z) + \sum_{k=0}^{i-1} y(k-i)z^{-i}] = \sum_{j=0}^{m} b_{m-j}[z^{-j}F(z)]$$

$$[\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} z^{-i}]Y(z) + \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}[\sum_{k=0}^{i-1} y(k-i)z^{-k}] = (\sum_{j=0}^{m} b_{m-j} z^{-j})F(z)$$

$$Y(z)=\frac{M(z)}{A(z)}+\frac{B(z)}{A(z)}F(z)=Y_x(z)+Y_f(z)$$

令 $H(z)=\dfrac{Y_f(z)}{F(z)}=\dfrac{B(z)}{A(z)}$ 称为系统函数

h(k)←→H(z)

例1：若某系统的差分方程为

$$y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=f(k)+2f(k-2)$$

已知y(–1)=2，y(–2)= –1/2，f(k)= ε(k)。求系统的$y_x(t)$、$y_f(t)$、y(t)。

解 方程取z变换

$Y(z)-[z^{-1}Y(z)+y(-1)]-2[z^{-2}Y(z)+y(-2)+y(-1)z^{-1}]=F(z)+2z^{-2}F(z)$

$$Y(z)=$$

$$\frac{(1+2z^{-1})y(-1)+2y(-2)}{1-z^{-1}-2z^{-2}}+\frac{1+2z^{-2}}{1-z^{-1}-2z^{-2}}F(z)=\frac{z^2+4z}{z^2-z-2}+\frac{z^2+2}{z^2-z-2}\frac{z}{z-1}$$

$$Y_x(z)=\frac{z^2+4z}{(z-2)(z+1)}=\frac{2z}{z-2}+\frac{-z}{z+1}\rightarrow y_x(k)=[2(2)^k-(-1)^k]\varepsilon(k)$$

$$Y_f(z)=\frac{2z}{z-2}+\frac{1}{2}\frac{z}{z+1}-\frac{3}{2}\frac{z}{z-1}\rightarrow y_f(k)=[2^{k+1}+\frac{1}{2}(-1)^k-\frac{3}{2}]\varepsilon(k)$$

例2：某系统，已知当输入$f(k)=(-1/2)^k\varepsilon(k)$时，其零状态响应

$$y_f(k)=[\frac{3}{2}(\frac{1}{2})^k+4(-\frac{1}{3})^k-\frac{9}{2}(-\frac{1}{2})^k]\varepsilon(k)$$

求系统的单位序列响应h(k)和描述系统的差分方程。

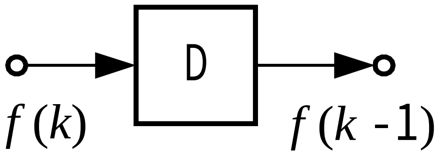
解

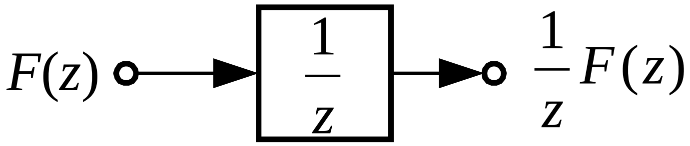
$$H(z)=\frac{Y_f(z)}{F(z)}=\frac{z^2+2z}{z^2-\frac{1}{6}z-\frac{1}{6}}=\frac{3z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{-2z}{z+\frac{1}{3}}$$

$h(k)=[3(1/2)^k-2(-1/3)^k]\varepsilon(k)$

$$y(k)-\frac{1}{6}y(k-1)-\frac{1}{6}y(k-2)=f(k)+2f(k-1)$$

二、系统的z域框图





三、s域与z域的关系

$z=e^{sT}$ $s=\frac{1}{T}\ln z$ 式中T为取样周期

如果将s表示为直角坐标形式 $s=\sigma+j\omega$，将z表示为极坐标形式 $z=\rho e^{j\theta}$

$\rho=e^{\sigma T}$，$\theta=\omega T$

由上式可看出：s平面的左半平面（$\sigma<0$）--->z平面的单位圆内部（$|z|=\rho<1$）

s平面的右半平面（$\sigma>0$）--->z平面的单位圆外部（$|z|=\rho>1$）

s平面的$j\omega$轴（$\sigma=0$）--->z平面中的单位圆上（$|z|=\rho=1$）

s平面上实轴（$\omega=0$）--->z平面的正实轴（$\theta=0$）

s平面上的原点（$\sigma=0$，$\omega=0$）---->z平面上z=1的点（$\rho=1$，$\theta=0$）

四、系统的频率响应

$$z=e^{sT}$$