FFT算法运算次数的差分方程求解研究

刘益成 （长江大学电子信息学院，湖北 荆州 434023）
穆群英，赵培根 （东方地球物理公司装备事业部，河北 涿州 072751）

[**摘要**] 为了准确推导FFT（快速傅里叶变换）算法的运算次数，直接从FFT递归分解式出发，建立了求解FFT算法运算次数的差分方程，求解了长度为 $N=2^m$ 一类递归FFT算法较为准确的运算次数，并以基2按时间抽取FFT算法为例进行了说明。还给出了求解 $N=2^m$（m为偶数）的基4按时间抽取FFT算法和按频域抽取分裂基FFT算法运算次数的差分方程及其相应的运算次数。

[**关键词**] FFT；差分方程；运算次数；基2算法；基4算法；分裂基FFT算法
[**中图分类号**] O174.22；TP312 [**文献标识码**] A [**文章编号**] 1673-1409(2008)03-N001-03
[**MR(2000)主题分类号**] 42C99；39A13

在可控震源地震数据实时相关处理中，FFT（快速傅里叶变换）是最核心的运算，为了实时处理的需要，要求能准确的估计它的运算次数。在FFT的许多算法中，用得最多的是变换长度 $N=2^m$ 的一类算法。这类算法的基本出发点是通过递归分解的方法将长度为 N 的离散傅里叶变换（DFT）逐次化为若干短DFT乘以一系列旋转因子，从而大大减少了直接进行DFT的运算量。评价一个FFT算法的好坏最重要的指标是该算法运算量的大小，即乘法和加法的次数的多少。以往对FFT运算次数的说明大都从蝶式运算出发，用信号流图的方法进行讨论[1,2]，这种方法直观，概念清楚，但由于没有建立直接计算运算量的数字模型，在估计运算次数时，将旋转因子中存在诸如乘 ±1，$\pm j$ 等非真正的运算的因素，往往也包括在内，因此不能得出精确的运算次数。为此，笔者利用差分方程对FFT算法的运算次数进行了求解。

1 基2按时间抽取FFT算法的运算次数

设序列 $x(n)$ 的长度 $N=2^m$，其DFT为：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nK}\qquad k=0,\cdots,N-1 \tag{1}$$

式中，$W_N=e^{-j2\pi/N}$。由按时间抽取FFT算法，将上述长为 N 的DFT化为2个 $N/2$ 长的分解式：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N/2-1}x(2n)W_{N/2}^{nK}+w_N^K\sum_{n=0}^{N/2-1}x(2n+1)W_{N/2}^{nK}\qquad k=0,\cdots,N/2-1$$

或

$$X(k)=X_1(k)+w_N^KX_2(k)\qquad X(k+N/2)=X_1(k)-w_N^KX_2(k)\qquad k=0,\cdots,N/2-1 \tag{2}$$

式中，$X_1(k)$、$X_2(k)$ 为分别对应于以 $x(n)$ 的偶数项和奇数项构成的长为 $N/2$ 的序列的DFT；w_N^K 为旋转因子。由式(2)可知，长为 $N=2^m$ 的DFT运算量等于2个长为 $N/2=2^{m-1}$ 的DFT加上乘旋转因子的运算。为了求出计算的实数乘法次数 $M(m)$ 和实数加法次数 $A(m)$，记长为 2^{m-1} 的 $X_1(k)$（或 $X_2(k)$）的实乘和实加次数分别为 $M(m-1)$ 和 $A(m-1)$。下面先讨论计算 $M(m)$ 的方法。

由式(2)可知，$M(m)$ 应等于 $2M(m-1)$ 再加上 $N/2$ 个 w_N^K 与 $X_2(k)$ 的乘法次数。由于 w_N^K 与 $X_2(k)$ 一般为复数，故旋转因子的乘法一般为复乘。仔细分析 w_N^K 与 $X_2(k)$ 所需的实乘次数可以发现，$w_N^0=1$，$w_N^{N/4}=-j$，此时不需要乘法运算；$w_N^{N/8}=e^{-j\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-j)$。设 $X_2(k)$ 为任何形如 $a+bj$ 的复数，则

[收稿日期] 2008-07-02
[作者简介] 刘益成（1947-），男，1970年大学毕业，教授，现主要从事信号与信号处理、DSP应用与地球物理仪器方面的研究工作。

$w_N^K X_2(k) = \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b) + \mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{2}(b-a)$,故需要 2 个实乘和 2 个实加。同理,当 $k = 3N/8$ 时,它与 $X_2(k)$ 的乘法也只需要 2 个实乘和 2 个实加。由此可知,当 k 从 0 变到 $N/2-1$ 时,旋转因子乘法运算次数总共需要 $N/2-4$ 个复乘加上 4 个实乘。若一个复乘用 4 个实乘 2 个实加来完成,则总共需要的乘法和加法次数分别为 $4(2^{m-1}-4)+4 = 2^{m+1}-12$、$2(2^{m-1}-4)+4 = 2^m-4$。

综上所述,可求得计算 $X(k)$ 实乘次数的差分方程为:

$$M(m) = 2M(m-1) + 2^{m+1} - 12 \tag{3}$$

同时按以上的分析,由式(2) 可知,当 $m = 2$ 即 $N = 4$ 点的 DFT 时,无乘法运算,故而可得出求解式(3) 的初始条件为:

$$M(2) = 0 \tag{4}$$

由式(3) 和式(4) 即可解得计算 $X(k)$ 所需要的实数乘法次数为:

$$M(m) = m \cdot 2^{m+1} - 7 \cdot 2^m + 12$$

对于加法次数 $A(m)$,按照前面同样的分析,除了前述旋转因子复乘中需要(2^m-4) 次实数加法外,由式(2) 可知,另外还需要 N 个复数加法即 $2N$ 个实数加法,以便由 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$ 合成 $X(k)$。故而可得计算 $X(k)$ 加法次数的差分方程为:

$$A(m) = 2A(m-1) + 3 \cdot 2^m - 4 \tag{5}$$

初始条件为:

$$A(2) = 16 \tag{6}$$

由式(5) 和式(6) 可解得实加次数为:

$$A(m) = 3m \cdot 2^m - 3 \cdot 2^m + 4$$

以上方法同样适用于变换长度 $N = 2^m$ 的其他基数的递归 FFT 算法, 基本方法是从各个算法的递归分解式出发, 计算因旋转因子乘法和附加的加法所需的运算次数从而导得求解运算次数的差分方程。

2　基 4 按时间抽取 FFT 算法的运算次数

设序列 $x(n)$ 的长度 $N = 2^m$ (m 为偶数),由基 4 按时间抽取 FFT 算法,将上述长为 N 的 DFT 化为 4 个 $N/4$ 长的分解式[3]:

$$\begin{aligned}
X(k) &= \sum_{l=0}^{3} W^{lk} \sum_{m=0}^{N/4-1} x(4m+l) W_{N/4}^{mk} \\
X\left(k+\frac{N}{4}\right) &= \sum_{l=0}^{3} (-\mathrm{j})^l W_N^{lk} \sum_{m=0}^{N/4-1} x(4m+l) W_{N/4}^{mk} \\
X\left(k+\frac{N}{2}\right) &= \sum_{l=0}^{3} (-1)^l W_N^{lk} \sum_{m=0}^{N/4-1} x(4m+l) W_{N/4}^{mk} \\
X\left(k+\frac{3N}{4}\right) &= \sum_{l=0}^{3} \mathrm{j}^l W_N^{lk} \sum_{m=0}^{N/4-1} x(4m+l) W_{N/4}^{mk} \qquad k = 0, \cdots, N/4-1
\end{aligned} \tag{7}$$

类似于上面基 2 按时间抽取 FFT 算法的讨论与分析,可以得到基 4 按时间抽取 FFT 算法的运算次数如下:

1) 乘法运算次数　乘法运算次数的差分方程为:

$$M(m) - 4M(m-2) = 3 \cdot 2^m - 24$$

初始条件为:

$$M(2) = 0$$

从而得到乘法运算次数为:

$$M(m) = \frac{3}{2} m \cdot 2^m - 5 \cdot 2^m + 8$$

2) 加法运算次数　加法运算次数的差分方程为:

$$A(m) - 4A(m-2) = \frac{11}{2} \cdot 2^m - 8$$

初始条件为：

$$A(2) = 16$$

从而得到加法运算次数为：

$$A(m) = \frac{11}{4} m \cdot 2^m - \frac{13}{6} \cdot 2^m + \frac{8}{3}$$

3　按频域抽取分裂基 FFT 算法的运算次数

按频域抽取分裂基 FFT 算法的分解式[4]为：

$$X(2k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) + x(n+N/2)] W_{N/2}^{nk}$$

$$X(4k+1) = \sum_{n=0}^{N/4-1} \{[x(n) - x(n+N/2)] - \mathrm{j}[x(n+N/4) - x(n+3N/4)]\} W_N^n W_{N/4}^{nk}$$

$$X(4k+3) = \sum_{n=0}^{N/4-1} \{[x(n) - x(n+N/2)] + \mathrm{j}[x(n+N/4) - x(n+3N/4)]\} W_N^{3n} W_{N/4}^{nk} \tag{8}$$

类似于上面基 2 按时间抽取 FFT 算法的讨论与分析，可以得到按频域抽取分裂基 FFT 算法的差分方程和运算次数如下：

1）乘法运算次数　乘法运算次数的差分方程为：

$$M(m) - M(m-1) - 2M(m-2) = 4 \cdot 2^{m-1} - 12$$

初始条件为：

$$M(1) = 0 \qquad M(2) = 0$$

从而得到乘法运算次数为：

$$M(m) = \frac{4}{3} m \cdot 2^m - \frac{38}{9} \cdot 2^m + 6 + (-1)^m \frac{2}{9}$$

2）加法运算次数　加法运算次数的差分方程为：

$$A(m) - A(m-1) - 2A(m-2) = m \cdot 2^{m+2} + 2^m - 4$$

初始条件为：

$$A(1) = 4 \qquad A(2) = 16$$

从而得到加法运算次数为：

$$A(m) = \frac{8}{3} m \cdot 2^m - \frac{16}{9} \cdot 2^m - (-1)^m \frac{2}{9} + 2$$

在以上各种算法中，复数乘法均按 4 个实数乘法 2 个实数加法进行运算。若复数乘法按 3 个实数乘法 3 个实数加法进行，类似地可得出相应的各组方程及其解。

[参考文献]

[1] Alan V O, Ronald W S. Digital Signal processing [M]. NJ: Prentice-Hall, 1975. 290～302.
[2] 刘益成，孙祥娥. 数字信号处理 [M]. 北京：电子工业出版社，2004.
[3] 努斯鲍默 H H. 快速傅立叶变换和卷积算法 [M]. 胡光锐译. 上海：上海科学技术文献出版社，1984. 111～114.
[4] Pierre D. Implementation of "Split-Radix" FFT glgorithms for complex, real, and real-symmetric data [J]. IEEE Trans On Assp, 1986; 34 (2): 285～295.

[编辑]　洪云飞

Journal of Yangtze University (Nat Sci Edit)
Sci & Eng V Vol1 5 No1 3 Sep1 2008

MAIN ABSTRACTS

01 **The Method for Solving Number of Operations for FFT Algorithm by Differential Equation**

LIU Yi2cheng (*Yangtze University, Jingzhou* 434023)
MU Quan2ying, ZHAO Pei2gen (*Orient Geopgysical Company, Zhuozhou* 072751)

Abstract: To accurately derive the operation numbers of Fast Fourier Transform (FFT), from recursive decomposition strategy of DFT, this paper builds differential equations for solving number of operations of FFT when the transform length is $N = 2^m$1 Based on these differential equations, the number of operations for several FFT algorithms in common use are calculated1

Key words: FFT; number of operations; radix22 algorithm; split2 radix algorithm; differential equation

04 **Poincare Bifurcation of Integrable System with Double Center Perturbed by Cubic Homogeneous Polynomial**

WU Hai2tao (*Guilin University of Electronics and Technology, Guilin* 541004; *Yangtze University, Jingzhou* 434023)
SONG Shu2gang, XU Jian2feng (*Yangtze University, Jingzhou* 434023)

Abstract: The Poincare bifurcation of integrable system with double center perturbed by cubic homogeneous polynomial was studied1 First the Abelian integrals were expressed into the linear combination of several basic integrals, thus the problem of number of zero was turned into one of the polynomial zeros, where the elliptic integral of the first or second kind was not appeared1 Finally the least upper bound of number on limit cycle 1 is obtained and proved1

Key words: Hilbert's 16th problem; Poincare bifurcation; Abelian integral

07 **The Modification of Least Square Method (LSM) in the Complex Field**

LI Meng2xia, CHEN Zhong (*Yangtze University, Jingzhou* 434023)

Abstract: In view of fitting of complex number, the paper modifies the LSM in the complex field, takes minimal sum of square of the relative fitting error as the optimization goal, and gives the estimated formula of unknown coefficients1 The result of numerical experiment shows that the method is feasible1

Key words: least square method; absolute error; relative error; complex field

09 **Frank2Wolfe Method Used for Solving Channel Capacity**

CAO Jing, ZHAO Tian2yu, CHEN Zhong (*Yangtze University, Jingzhou* 434023)

Abstract: In general, communication system includes the source, channel and receiver1 Channel refers to the media of information transmission1 Channel capacity is the most important parameter1 Simply computation of the channel capacity of special channels is introduced, and the Frank2Wolfe method is used to solve the problem of capacity to general discrete memoryless channel, which is more simple than that of iteration1

Key words: discrete memoryless channel; channel capacity; Frank2Wolfe method

11 **Analysis on the FDI of Co2integration Theory and the Effect on Employment in Our Country**

HE Xian2ping, CHEN Shuo, HAN Dan (*Yangtze University, Jingzhou* 434023)

Abstract: The paper uses co2integration theory to analyze the relationship between China's FDI and employment level and foreign direct investment (FDI)1 The results of empirical analyses show that China's total employment, the employment of secondary industries, tertiary industries and FDI exist